Objectif 1 : savoir utiliser les propriétés des polynômes du second degré

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+3)(2x-5)(6x+2)=0$ **2.** $x^2-12=0$ **3.** $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x+1}$

4. $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3}$ **5.** $x^2+x+1=0$ **6.** $x^2-x+1=0$

7. $\dfrac{x+1}{x-1}=x$ **8.** $x^2-2x-3=0$ **9.** $x^2-x-1=0$

10. $3x^2+x-2=0$ **11.** $-x^2-5x+1=0$ **12.** $\dfrac{1}{x}=x-1$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dépendant du paramètre réel m : $\dfrac{3x-m}{x-1}=m-2$

Exercice 3 Simplifier l'expression $f(x)$ suivante (on suppose qu'elle est bien définie).

1. $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+4}{(x-1)(4x+12)}$ **2.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}-\dfrac{1}{x-3}$

Exercice 4 Déterminer l'ensemble E suivant : $E=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+x-6\leqslant 0\}$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x-2}\leqslant\dfrac{1}{2x}$ **3.** $x-\dfrac{2}{x}>1$ **5.** $x^2-3x-10\geqslant 0$

2. $\dfrac{2x+1}{1+x}\leqslant\dfrac{3x-2}{1+x}$ **4.** $-4x+7\leqslant -6$ **6.** $x^3+5x\leqslant 6x$

Objectif 2 : savoir utiliser les propriétés des fonctions valeur absolue, inverse, racine carrée, et partie entière

Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer l'expression $f(x)=|x^2-5x+6|$ suivant les différentes valeurs possibles de x.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations, d'inconnue x réelle :

a. $|x-5|<6$ **b.** $|x-3|\geqslant 4$ **c.** $|7-3x|\leqslant 5$ **d.** $|x+4|\leqslant 5-3x$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1|=x-4$

4. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$, on a : $\dfrac{3}{|x|+2}\geqslant 1$

Exercice 7 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x}<4$? et de l'inéquation $\dfrac{1}{x}<-4$?

2. Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$

Exercice 8 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Simplifier les écritures des nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$;

$B = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; $C = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

2. Exprimer $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ en fonction de $\sqrt{2}$

3. Montrer que pour tout réel t, on a : $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$

4. Préciser pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie, et simplifier cette expression

a. $f(x) = \sqrt{x^4-6x^2+9}$ **b.** $f(x) = \sqrt{x-1} - \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}}$

Indication : penser aux identités remarquables !

Exercice 9 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a : $-2 \leqslant -\dfrac{2}{x^2} < -\dfrac{2}{9}$

2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a : $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \dfrac{3}{2}$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{t}$

4. Montrer que pour tout $x \in [1,4]$, on a : $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}+x-1} \leqslant 1$

5. On suppose que $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 1 \leqslant b \leqslant 2 \end{cases}$. Démontrer que : $2 \leqslant a^2 - \dfrac{2}{b} \leqslant 8$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\lfloor (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n+1$

Exercice 11 Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réelle suivantes :

1. $|x-2| = 1$

2. $|2x+1| \geqslant 7$

3. $|x+1| + |x+2| = 1$

4. $\lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2$

5. $\sqrt{x}+1 = x$

6. $x = \sqrt{x}+2$

Objectif 3 : savoir utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Exercice 12 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Exprimer $\ln(4\sqrt{2})$ en fonction de $\ln 2$.

2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^4+5x^2-2 = 0$

2. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$

3. $e^x + e^{-x} = 2$

4. $\ln(3x) + \ln(x-1) = \ln 2 + 2\ln 3$

Exercice 14 Résoudre les inéquations d'inconnue x réelle suivantes :

1. $|\ln(x)| < 1$ **2.** $\ln(x^2-4e^2) < 1 + \ln(3x)$ **3.** $e^{2x} + 8 \geqslant 6e^x$