## Exercice 1 Activité rapide

1. Résoudre l'inéquation $(x+12)(4x+16)<0$. $S = ]-12,-4[$
2. $2+\dfrac{13}{\frac{3}{7}\times\frac{28}{27}} =$ $\dfrac{125}{4}$
3. L'équation $x^2-4x+5=0$ possède dans $\mathbb{R}$ :
   ☐ une seule solution ■ aucune solution ☐ deux solutions
4. Compléter avec les exposants qui conviennent : $2^9\times 10^2\times 20^9 = 2^a\times 5^b$ avec $a=29$ et $b=11$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $(x+2)^2=5$ . $S=\{\sqrt{5}-2;-\sqrt{5}-2\}$
6. $\dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{12}} =$ $\dfrac{9}{4}$
7. Compléter le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{4}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $(3x+4)(-5x+5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

8. $f(x)=e^x$ Alors $f(2\ln 2)=$ $4$
9. $x_1$ et $x_2$ sont des nombres réels dont la somme est 8 et le produit $-5$. Alors $x_1$ et $x_2$ sont solutions de l'équation : ■ $2x^2-16x-10=0$ ■ $x^2-8x-5=0$ ☐ $x^2+8x-5=0$
10. $\ln(5e^{-3})=$ ☐ $-3\ln(5)$ ■ $-3+\ln(5)$ ☐ $\ln(5)+e^{-3}$ ☐ aucun des trois autres
11. Compléter le tableau de signes de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7(x-4)^2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $7(x-4)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

12. Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(7)$ : $\ln(\dfrac{8}{49})$ $3\ln 2-2\ln 7$
13. Soit $f(x)=-4x^2-9x+10$ de discriminant strictement positif.
    Le produit des deux racines de $f$ est égal à : ☐ $\dfrac{9}{4}$ ☐ $-\dfrac{9}{4}$ ☐ $\dfrac{5}{2}$ ■ $-\dfrac{5}{2}$
14. $\dfrac{12\times 14}{8\times 15}-\dfrac{11}{15}=$ $\dfrac{2}{3}$
15. L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+5x+4>0$ est : $\mathbb{R}$
16. $\sqrt{32}-\sqrt{2}=\sqrt{18}$ ☐ Faux ■ Vrai
17. Donner une racine évidente de $f(x)=5x^2+3x-2$ : $-1$ En déduire la seconde racine : $\dfrac{2}{5}$
18. Pour tout nombre réel $x$, $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=$ ☐ $\dfrac{-2}{e^x+1}$ ■ $\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ☐ $\dfrac{2}{e^x+1}$ ☐ $\dfrac{2+e^x}{e^x+1}$
19. $9-(\dfrac{8}{3})^2=$ $\dfrac{17}{9}$
20. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+5x-2>0$ est :
    ☐ $\emptyset$ ☐ $]-\infty\,;\,\dfrac{2}{3}[\cup]1\,;\,+\infty[$ ■ $]\dfrac{2}{3}\,;\,1[$ ☐ $[\dfrac{2}{3}\,;\,1]$

**Exercice 2**

**A.** On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Étudier la parité puis les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

• $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x$ réel, $f(-x) = (-x)e^{1-(-x)^2} = -xe^{1-x^2} = -f(x)$ car la fonction carrée est paire. La fonction $f$ est donc impaire sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $x \mapsto e^{1-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

Et pour tout $x$ réel, $f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x) \times e^{1-x^2} = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}$.

On utilise : $f = ue^v \Longrightarrow f' = u'\mathrm{e}^v + u\,(v'\mathrm{e}^v) = (u' + uv')\mathrm{e}^v$

avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1 - x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$

$\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\left(1 - 2x^2\right) = \left(1 - x\sqrt{2}\right)\left(1 + x\sqrt{2}\right)$

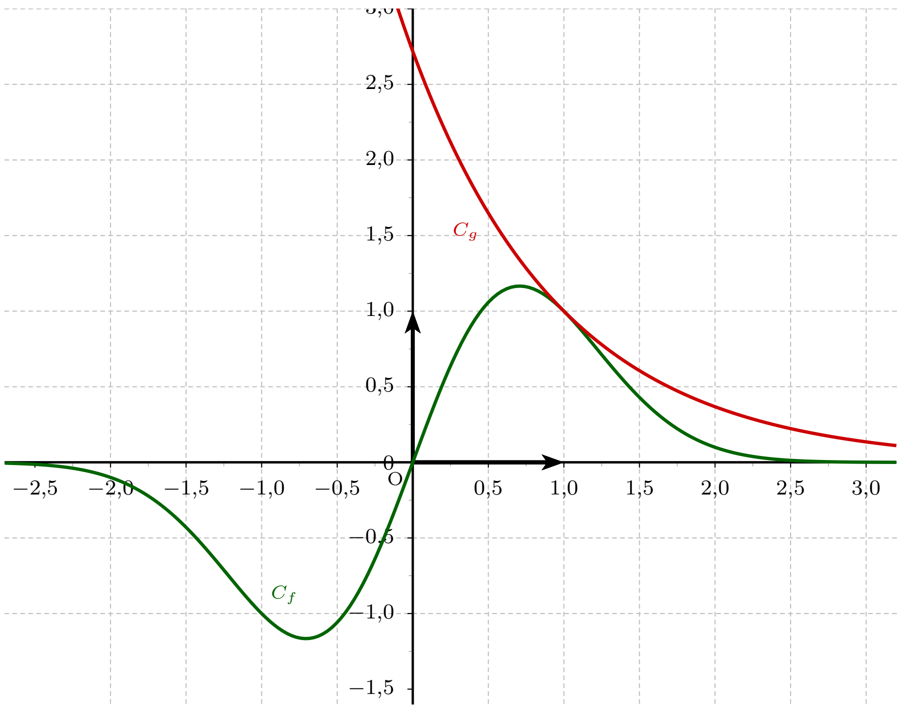
$f$ est donc décroissante sur $]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, croissante sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ puis décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

Remarque : on obtient le tableau de variations de la fonction $f$ suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$ | $\searrow$ | |

**B.** On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions $f$ et $g$.




Le but de cette question est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

**1.** Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

Il semblerait que $C_f$ soit toujours en dessous de $C_g$

**2.** Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.

Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$. On en déduit que sur $]-\infty\ ;\ 0]$ , $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) > 0$.
On a donc bien $\forall x \in ]-\infty\ ;\ 0]$ , $f(x) < g(x)$

**3.** Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On pose, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

**a.** Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$.

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{1-x^2} \leq \mathrm{e}^{1-x}$
si $x > 0$ alors cette inéquation est équivalente à $\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln\left(\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \Leftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leqslant 0$
Finalement si $x > 0$, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$

**b.** Étudier les variations de la fonction $\Phi$.

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$ , $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x} = \dfrac{(x-1)(-2x-1)}{x} = \dfrac{(1-x)(2x+1)}{x}$
or sur $]0\ ;\ +\infty[$ , $\dfrac{2x+1}{x} > 0$ donc $\Phi'(x)$ est du signe de $(1-x)$
Donc $\Phi$ est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$
Remarque : on a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi'(t)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\Phi(t)$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

**c.** En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\Phi$ admet 0 pour maximum donc $\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$ , $\Phi(x) \leqslant 0$.

**4. a.** La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

La conjecture est validée puisque l'on vient de montrer que $\Phi(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ or on avait montré que $f(x) < g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
Finalement $C_f$ est bien toujours en dessous de $C_g$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté $A$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
$A(1\ ;\ 1)$ est donc l'unique point commun de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

**c.** Montrer qu'en ce point $A$, ces deux courbes ont la même tangente.

$g$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.
$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$ , $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ Et alors $g'(1) = -1$ or $f'(1) = -1$
Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente en $A$

**Exercice 3 Des questions en vrac...**

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2$ et l'inéquation $2e^{2x} - e^x - 1 > 0$.

L'ensemble de définition de cette équation est : $]0;+\infty[$
Et : pour tout $x > 0, \ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x(x-3)) = \ln(4) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$ (en utilisant par exemple les racines évidentes).
Cette équation admet donc une unique solution qui est 4.

Posons $X = e^x$. On obtient alors le polynôme du second degré $2X^2 - X - 1$ qui admet 1 pour racine évidente et donc $-\frac{1}{2}$ pour seconde racine car le produit de ces deux racines doit être égal à $\frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$. Et : $2X^2 - X - 1 > 0 \Leftrightarrow X < -\frac{1}{2}$ ou $X > 1$ car $a = 2 > 0$.
Donc pour tout $x$ réel, $2e^{2x} - e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x < -\frac{1}{2}$ (ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$) ou $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
On a donc : $S = R_+^*$

**2.** Soit le réel négatif $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

**a.** Calculer $A^2$.
$A^2 = (\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 = 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{5}} + 3 + \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 2$.
Ainsi, $A^2 = 2$.

**b.** En déduire une écriture plus simple de $A$.
$A^2 = 2$ équivaut à $A = -2$ ou $A = 2$.
Comme $A$ est un réel négatif, on en déduit que $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}} = -\sqrt{2}$.