ECG 1a - Mathématiques | **TD n°2** | Septembre 2023

Exercice 1 Activité rapide

1. Résoudre l'inéquation $(x+12)(4x+16)<0$.

2. $2+\dfrac{13}{\frac{3}{7}\times\frac{28}{27}}=$

3. L'équation $x^2-4x+5=0$ possède dans $\mathbb{R}$:

☐ une seule solution ☐ aucune solution ☐ deux solutions

4. Compléter avec les exposants qui conviennent : $2^9\times 10^2\times 20^9=2^a\times 5^b$ avec $a=\cdots$ et $b=\cdots$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $(x+2)^2=5$.

6. $\dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{12}}=$

7. Compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $(3x+4)(-5x+5)$	

8. $f(x)=e^x$ Alors $f(2\ln 2)=$

9. x_1 et x_2 sont des nombres réels dont la somme est 8 et le produit -5. Alors x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : ☐ $2x^2-16x-10=0$ ☐ $x^2-8x-5=0$ ☐ $x^2+8x-5=0$

10. $\ln(5e^{-3})=$ ☐ $-3\ln(5)$ ☐ $-3+\ln(5)$ ☐ $\ln(5)+e^{-3}$ ☐ aucun des trois autres

11. Compléter le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7(x-4)^2$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $7(x-4)^2$	

12. Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(7)$: $\ln(\dfrac{8}{49})$

13. Soit $f(x)=-4x^2-9x+10$ de discriminant strictement positif.

Le produit des deux racines de f est égal à : ☐ $\dfrac{9}{4}$ ☐ $-\dfrac{9}{4}$ ☐ $\dfrac{5}{2}$ ☐ $-\dfrac{5}{2}$

14. $\dfrac{12\times 14}{8\times 15}-\dfrac{11}{15}=$

15. L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+5x+4>0$ est :

16. $\sqrt{32}-\sqrt{2}=\sqrt{18}$ ☐ Faux ☐ Vrai

17. Donner une racine évidente de $f(x)=5x^2+3x-2$: En déduire la seconde racine :

18. Pour tout nombre réel x, $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=$ ☐ $\dfrac{-2}{e^x+1}$ ☐ $\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ☐ $\dfrac{2}{e^x+1}$ ☐ $\dfrac{2+e^x}{e^x+1}$

19. $9-(\dfrac{8}{3})^2=$

20. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+5x-2>0$ est :

☐ $\emptyset$ ☐ $]-\infty\,;\,\dfrac{2}{3}[\cup]1\,;\,+\infty[$ ☐ $]\dfrac{2}{3}\,;\,1[$ ☐ $[\dfrac{2}{3}\,;\,1]$

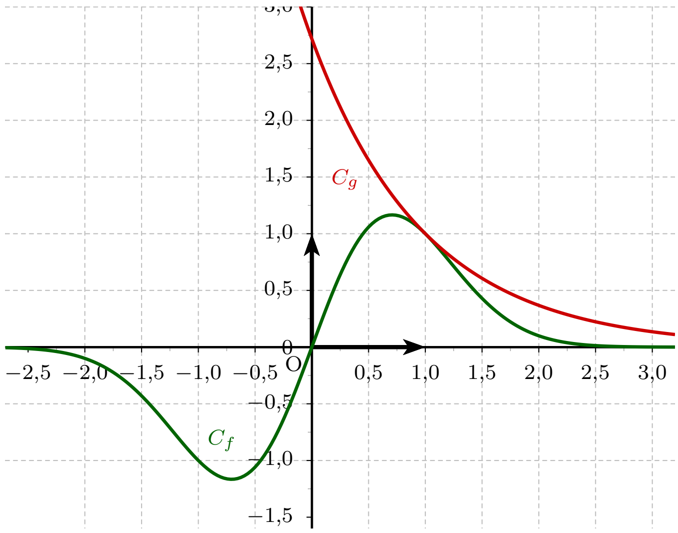
Exercice 2

A. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Étudier la parité puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.

B. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette question est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$.

b. Étudier les variations de la fonction Φ.

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. **a.** La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Exercice 3 Des questions en vrac...

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2$ et l'inéquation $2e^{2x} - e^x - 1 > 0$.

2. Soit le réel négatif $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

a. Calculer A^2.

b. En déduire une écriture plus simple de A.