ECG 1a - Mathématiques	**TD n°1**	Septembre 2023

Les questions suivantes sont à faire DANS L'ORDRE et par groupe de 2 ou 3, à RÉDIGER et à rendre sur copie pour la fin de l'heure.

1. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$ sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

• $x \in [3,6] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 6$ et $y \in [-4,-2] \Leftrightarrow -4 \leq y \leq -2$ donc $-1 \leq x+y \leq 4$
• Comme $-4 \leq y \leq -2$, $2 \leq -y \leq 4$ d'où $5 \leq x-y \leq 10$
• y est négatif donc on part de $2 \leq -y \leq 4$ pour obtenir l'encadrement de $-xy$ suivant : $6 \leq -xy \leq 24$ et donc $-24 \leq xy \leq -6$
• $-y \in [2,4]$ or la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc $\dfrac{1}{4} \leq -\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2}$ et alors par produit : $\dfrac{3}{4} \leq -\dfrac{x}{y} \leq 3$ d'où $-3 \leq \dfrac{x}{y} \leq -\dfrac{3}{4}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\mid 1-x \mid -2 \mid x+3 \mid = -9$ et $x+1 = \sqrt{x+2}$

$\mid 1-x \mid -2 \mid x+3 \mid = -9$:
• Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$
• si $x \leq -3$:
$\mid 1-x \mid -2 \mid x+3 \mid = 1-x-2(-x-3) = 1-x+2x+6 = x+7$ et $x+7=-9 \Leftrightarrow x=-16$ qui est bien inférieur à -3
• si $-3 \leq x \leq 1$:
$\mid 1-x \mid -2 \mid x+3 \mid = 1-x-2(x+3) = 1-x-2x-6 = -3x-5$ et $-3x-5=-9 \Leftrightarrow -3x=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ mais qui est supérieur à 1
• si $x \geq 1$:
$\mid 1-x \mid -2 \mid x+3 \mid = -1+x-2(x+3) = -1+x-2x-6 = -x-7$ et $-x-7=-9 \Leftrightarrow x=2$ qui est bien supérieur à 1
• Bilan : $S = \{-16;2\}$

$x+1=\sqrt{x+2}$:
• Cette équation est définie sur $[-2;+\infty[$ car la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$
• si $x < -1, x+1 < 0$ et l'équation ne peut donc pas être vérifiée car la fonction racine carrée est positive sur $\mathbb{R}_+$
• Si $x \geq -1$, $x+1 \geq 0$ et donc $x+1=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = x+2 \Leftrightarrow$ $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=x_1$ ou $x=x_2$ où $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ donc en peut pas convenir et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \geq -1$
• Bilan : $S = \{x_2\}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x}$.

• Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
• Pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x+2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x(x-1)} - \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{2x-(x^2+2x-x-2)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+x+2}{x(x-1)} \geq 0$
Pour le trinôme $x(x-1)$ dont les racines sont 0 et 1, on a $a=1>0$. On obtient donc le signe indiqué dans le tableau ci-dessous.
Pour le trinôme $-x^2+x+2$: une racine évidente est -1 donc l'autre racine est 2 car le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = -2$ et comme $a=-1<0$. On obtient donc le signe indiqué dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		-	0	+		+		+	0	-	
$x(x-1)$		+		+	0	-	0	+		+	
$\dfrac{-x^2+x+2}{x(x-1)}$		-	0	+	$\Vert$	-	$\Vert$	+	0	-	

- On a donc $S=[-1,0[\cup]1,2]$

4. Simplifier les nombres suivants :

$A=\dfrac{2^{-15}\times(-3)^7\times15^{-30}\times14^3}{6^{17}\times15^{-30}\times21^3}=-\dfrac{2^{-15}\times3^7\times(7\times2)^3}{(2\times3)^{17}\times(7\times3)^3}=-\dfrac{2^{-15}\times3^7\times7^3\times2^3}{2^{17}\times3^{17}\times7^3\times3^3}=-\dfrac{1}{2^{12}\times2^{17}\times3^{13}}=$
$-\dfrac{1}{2^{29}\times3^{13}}$;

$B=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;,

Pour tout entier n, $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{1\times(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\times(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Donc $B=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$
$\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$

$C=\dfrac{(2\sqrt{5})^4+(5\sqrt{2})^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}\times10^{-2}=\dfrac{2^4\times5^2+5^4\times2^2}{2^2+5^2}\times10^{-2}=\dfrac{2^2\times5^2(2^2+5^2)}{2^2+5^2}\times10^{-2}=\dfrac{2^2+5^2}{2^2+5^2}=1$

5. Vrai ou faux ? $\dfrac{\sqrt{\dfrac{(10^3+(100-\sqrt{121}))^2}{1+(4-2\sqrt{4})}\times\dfrac{(\frac{100}{4}-1)}{2^3}}}{3^2\sqrt{(10^2+(3\times7))}}=33$

$\dfrac{\sqrt{\dfrac{(10^3+(100-\sqrt{121}))^2}{1+(4-2\sqrt{4})}\times\dfrac{(\frac{100}{4}-1)}{2^3}}}{3^2\sqrt{(10^2+(3\times7))}}=\dfrac{\dfrac{10^3+100-11}{\sqrt{5-2\times2}}\times\dfrac{25-1}{8}}{9\times\sqrt{100+21}}=\dfrac{\dfrac{1089}{1}\times\dfrac{24}{8}}{9\times\sqrt{121}}=\dfrac{1089\times3}{9\times11}=\dfrac{1089}{3\times11}=$
$\dfrac{363}{11}=33$: donc c'est vrai !