Exercice 1 - Vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.

2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.

3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$

4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$

6. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$

7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$

8. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

9. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

10. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

Exercice 2 - Du texte aux quantificateurs

Ecrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes, et préciser si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré de tout nombre réel est positif ou nul.

2. Certains nombres réels sont plus grands que leurs carrés.

3. Tout entier naturel est strictement inférieur à au moins un réel positif.

.

Exercice 3 - Du texte aux quantificateurs (encore!)

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f s'annule.

2. f ne s'annule jamais.

3. f est inférieure à g.

4. f est positive.

5. f n'est pas positive.

6. f est la fonction nulle.

7. f n'est pas la fonction nulle.

8. f est constante

9. f n'est pas constante

10. f est majorée par 57.

11. f est majorée.

12. f est périodique.

Exercice 4 - Du quantificateur au texte

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Enoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Pour chaque assertion, peut-on trouver une fonction qui la satisfait ? Qui ne la satisfait pas ?

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$

3. $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$

4. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$

Exercice 5 - Nier des assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 1$

2. $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geqslant 0$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$

Exercice 6 - Vrai ou faux et nier des assertions avec quantificateurs

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
d) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

1. Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 7 - Nier des assertions avec quantificateurs (plus difficile)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A,\ f(x) > M$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leqslant 0$
4. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon\big)$

Exercice 8 - Limites de validité d'une proposition

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geqslant y \implies x \geqslant y^2$$

Exercice 9 - Connecteurs logiques

Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $x^2 = 4 \ldots x = 2$
2. $\sqrt{x}$ existe $\ldots x \geqslant 0$
3. $e^x = 1 \ldots x = 0$
4. $|x| = 5 \cdots -5 \leqslant x \leqslant 5$

Exercice 10 - Contraposée - Pair/impair

Soit n un entier. Enoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

« Si n^2 est impair, alors n est impair. »

A-t-on démontré la proposition initiale ?

Exercice 11 - Divisibilité par 8

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. Démontrer la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?