Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Définitions $\sum$ et $\prod$	1, 10, 11	
Sommes ou produits de référence	2, 4, 7, 11, 12	8
Télescopage	5, 18	4, 9, 13
Changement d'indice	3	4, 6
Factorielle	11, 14, 15, 16	17
Sommes doubles	19	

Sommes

Exercice 1

Ecrire à l'aide du symbole $\sum$:

1. $A = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 50$
2. $A_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n + \ldots + \left(\frac{26}{25}\right)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
3. $B_n = 1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + \ldots + n^6$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
4. $C_n = \ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$)
5. $D = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{100}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$)

Exercice 2

Calculer, ou simplifier en fonction de n, les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} k$

f) $\displaystyle\sum_{k=8}^{15} k$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{13} x$ (où $x \in \mathbb{R}$)

h) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} q^k$ (avec $q \neq 1$)

i) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k-2}}$

Exercice 3

Réécrire autrement les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{k=1}^{\ldots} \ldots$

b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} (i-2) = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} k$

c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{i+1}{i} = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \frac{k}{k-1}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \sum_{k=1}^{\ldots} \ldots$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer S_n en fonction de n, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer S_n en fonction de n, avec $S_n = \sum_{k=2}^{n} n$

3. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Calculer S_n en fonction de n, en commençant par un changement d'indice : $S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{i^2-4i+3}{i-1}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme S_n suivante en fonction de n : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(e^{k+2}-e^{k+1})$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier par télescopage la somme S_n : $S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\ln(k+1)}{k^2+4k+4} - \frac{\ln(k)}{k^2+2k+1}\right)$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer S_n en fonction de n, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Exercice 5 - une somme télescopique

Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

En déduire l'expression de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ pour $n \geqslant 2$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'égalité suivante (en faisant d'abord un changement d'indice) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$$

Exercice 7

Calculer

a) $\sum_{k=0}^{9} k^2$

b) $\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k$

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

a) $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-2)^k + 2k^2 + \frac{n}{3}\right)$

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n+2} k^2$

c) $S_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2$

d) $S_n = \sum_{k=2}^{n} 2^k 3^{n-k}$

Exercice 9 - sommes géométrique et télescopique, et changement d'indice

Soit q un nombre réel (ou complexe) différent de 1 et n un entier positif ou nul.

a) Calculer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$ et en déduire la formule de la somme géométrique.

b) A l'aide d'un changement d'indice approprié, en déduire la formule généralisée.

Produits

Exercice 10

Ecrire avec la notation $\prod$ les expressions suivantes :

a) $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\ldots\sin(nx)$

b) $X(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$

c) $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)$

d) $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   - **a.** Ecrire A_n à l'aide du symbole $\prod$:$A_n = \exp(1) \times \exp(2) \times \exp(3) \times \ldots \times \exp(n)$
   - **b.** Simplifier A_n en fonction de n
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = (n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \ldots \times (2n-1) \times 2n$
   - **a.** Ecrire B_n à l'aide du symbole $\prod$
   - **b.** Ecrire B_n à l'aide de factorielles.

Exercice 12

Simplifier en fonction de n les produits suivants. ($n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}^*$).

a) $\prod_{k=0}^{n} 5$

b) $\prod_{k=1}^{n} (2k)$

c) $\prod_{k=0}^{n+1} x^k$

Exercice 13

1. Pour k un entier supérieur ou égal à 2, mettre $1 - \frac{1}{k^2}$ au même dénominateur puis factoriser le numérateur de la fraction obtenue.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression du produit P_n en fonction de n :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 14 - factorielle - 1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(n+1)! - n!$ b) $(n+1)! + (n-1)!$ c) $(n+2)! - 4n!$ d) $(2n+1)! - (2n)!$

Exercice 15 - factorielle - 2

Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} k = \frac{a!}{b!}$ où a et b sont deux entier à préciser.

Exercice 16 - factorielle - 3

Ecrire les nombres suivants à l'aide de factorielle :

a) $\displaystyle\prod_{j=3}^{n} (2j)$ b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{n+k}\right)$

Exercice 17 - factorielle - 4

On pose $C = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)$ et $D = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$ (cf. exercice 1).

a) Ecrire D sous la forme d'une factorielle et d'une puissance.

b) En déduire que $C = \dfrac{a!}{2^n b!}$ où a et b sont deux entier à préciser.

Exercice 18 - Produit télescopique

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$

Sommes doubles

Exercice 19 - sommes doubles

Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} ij$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (i+j)$