

Quelques corrigés

Sommes

Exercice 2

Calculer, ou simplifier en fonction de n , les sommes suivantes.

$$i) \sum_{k=4}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k-2}} = \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{3^{-2}} \times \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3^{-2}} \sum_{k=4}^{n+1} \frac{2^k}{3^k} = 3^2 \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^2 \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{\frac{1}{3}}$$

$$\text{donc } \sum_{k=4}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k-2}} = 3^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right) = \frac{16}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'égalité suivante (en faisant d'abord un changement d'indice) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \frac{j}{n}}$$

Souvent dans ce genre de situation, il vaut mieux partir de l'expression la plus compliquée :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \frac{j}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\frac{n+j}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n}{n+j} = \frac{1}{n} \times n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}$$

A ce stade, le changement d'indice est naturel, on pose $k = n + j$, donc $j = 1 \Rightarrow k = n + 1$ et

$$j = n \Rightarrow k = n + n = 2n \text{ donc } \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 7

Calculer

$$a) \sum_{k=0}^9 k^2 = \frac{9 \times 10 \times (2 \times 9 + 1)}{6} \text{ d'après le cours, donc } \sum_{k=0}^9 k^2 = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 19}{6} = 15 \times 19 = 285$$

$$b) \sum_{k=1}^{200} (-1)^k k$$

On ne peut évidemment pas utiliser d'emblée la somme des entiers, mais on va s'y ramener en

$$\text{introduisant } \sum_{k=1}^{200} k : \sum_{k=1}^{200} (-1)^k k + \sum_{k=1}^{200} k = \sum_{k=1}^{200} ((-1)^k + 1)k$$

or si k est pair $(-1)^k = 1$ alors $((-1)^k + 1) = 2$

et si n est impair $(-1)^k = -1$ alors $((-1)^k + 1) = 0$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{200} (-1)^k k + \sum_{k=1}^{200} k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{200} 2k = 2 \sum_{p=1}^{100} 2p = 4 \sum_{p=1}^{100} p = 4 \times \frac{100 \times 101}{2} = 2 \times 100 \times 101 = 20\,200$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^{200} k = \frac{200 \times 201}{2} = 100 \times 201 = 20\,100 \text{ donc } \sum_{k=1}^{200} (-1)^k k = 20\,200 - 20\,100 = 100$$

On peut aussi remarquer (en écrivant la somme avec des ...), que :

$$\sum_{k=1}^{200} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{100} [2k - (2k - 1)] = \sum_{k=1}^{100} 1 = 100$$

Exercice 9 - sommes géométrique et télescopique, et changement de variable

Soit q un nombre réel (ou complexe) différent de 1 et n un entier positif ou nul.

a) Calculer $(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k$ et en déduire la formule de la somme géométrique.

$$\text{On commence par distribuer } (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k$$

$$\text{or par linéarité } q \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n qq^k = \sum_{k=0}^n q^{k+1}$$

$$\text{donc } (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \text{ par linéarité à nouveau}$$

on se retrouve alors avec une somme télescopique, en posant $a_k = q^k$, on a alors $a_{k+1} = q^{k+1}$

$$\text{et donc } \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{Finalement } (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1} \text{ et donc si } q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) A l'aide d'un changement de variable approprié, en déduire la formule généralisée.

On cherche à se ramener à une somme qui commence à 0. Pour cela, on pose $j = k - p$, alors $k = p \Rightarrow j = 0$ et $k = n \Rightarrow j = n - p$:

$$\text{donc } \sum_{k=p}^n q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{p+j} = \sum_{j=0}^{n-p} q^p q^j = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j$$

on se retrouve alors dans la situation de la formule démontrée au a),

$$\sum_{j=0}^{n-p} q^j = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ et donc } q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{q^p(1 - q^{n-p+1})}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n-p+1+p}}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{or } \sum_{k=p}^n q^k = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j \text{ et donc } \sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

Produits

Exercice 12

Simplifier en fonction de n les produits suivants. ($n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}^*$).

a) $\prod_{k=0}^n 5 = 5^{n+1}$ d'après le cours

b) $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$ d'après le cours

$$\text{On peut le redémontrer en écrivant (autre propriété du cours) } \prod_{k=1}^n (2k) = \left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \left(\prod_{k=1}^n k \right) = 2^n n!$$

c) $\prod_{k=0}^{n+1} x^k$

Les propriétés sur les puissances ($x^a x^b = x^{a+b}$) entraîne $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{0+1+2+\dots+n+1} = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$, ce que

l'on va démontrer par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n) : \prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$

Initialisation : pour $n = 0$, d'une part $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = \prod_{k=0}^{0+1} x^k = x^0 \times x = x$

d'autre part, $x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} = x^{\sum_{k=0}^{0+1} k} = x^{0+1} = x$
donc $P(0)$ est vérifiée

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

$$\prod_{k=0}^{n+2} x^k = \left(\prod_{k=0}^{n+1} x^k \right) x^{n+2}$$

or par hypothèse de récurrence : $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$

$$\text{donc } \prod_{k=0}^{n+2} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} x^{n+2} = x^{(\sum_{k=0}^{n+1} k) + n+2} = x^{\sum_{k=0}^{n+2} k} \text{ car } \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right) + n + 2 = \sum_{k=0}^{n+2} k$$

donc $P(n+1)$ est vérifiée, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Puis on conclut en utilisant la somme des entiers :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ donc } x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} = x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \text{ et donc } \prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Exercice 13

1. Pour k un entier supérieur ou égal à 2, mettre $1 - \frac{1}{k^2}$ au même dénominateur puis factoriser le numérateur de la fraction obtenue.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}, k \geq 2, 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression du produit P_n en fonction de n :

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\text{D'après 1. } P_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1)(k+1)}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{(\prod_{k=2}^n (k-1)) (\prod_{k=2}^n (k+1))}{(\prod_{k=2}^n k) (\prod_{k=2}^n k)}$$

$$\text{donc } P_n = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k \prod_{k=2}^n k} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}$$

$$\text{il s'agit de deux produits télescopiques } \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \text{ et } \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{donc finalement } P_n = \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 14 - factorielle - 1

Simplifier les expressions suivantes : d) $(2n+1)! - (2n)!$

Comme au a), $(2n+1)! - (2n)! = (2n+1)(2n)! - (2n)! = (2n+1-1)(2n)! = 2n(2n)!$

Exercice 15 - factorielle - 2

Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, $\prod_{k=p}^n k = \frac{a!}{b!}$ où a et b sont deux entiers à préciser.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, alors l'objectif étant de se ramener à des factorielles, on va compléter le produit par les termes manquants :

$$\prod_{k=p}^n k = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} k \prod_{k=p}^n k}{\prod_{k=1}^{p-1} k} = \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^{p-1} k} \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$\text{or } \prod_{k=1}^n k = n! \text{ et } \prod_{k=1}^{p-1} k = (p-1)! \text{ donc } \prod_{k=p}^n k = \frac{n!}{(p-1)!}$$

Exercice 16 - factorielle - 3

Ecrire les nombres suivants à l'aide de factorielle :

$$\text{a) } \prod_{j=3}^n (2j)$$

$$\text{D'après la propriété du cours } \prod_{j=3}^n (2j) = 2^{n-2} \prod_{j=3}^n j$$

$$\text{or } \prod_{j=3}^n j = \frac{\prod_{j=1}^2 j \prod_{j=3}^n j}{\prod_{j=1}^2 j} = \frac{\prod_{j=1}^n j}{1 \times 2} = \frac{n!}{2}$$

$$\text{finalement } \prod_{j=3}^n (2j) = 2^{n-2} \times \frac{n!}{2} = 2^{n-3} n!$$

$$\text{b) } \prod_{k=0}^n \left(\frac{2}{n+k} \right)$$

$$\text{Par propriété } \prod_{k=0}^n \left(\frac{2}{n+k} \right) = \frac{\prod_{k=0}^n 2}{\prod_{k=0}^n (n+k)} = \frac{2^{n+1}}{\prod_{k=0}^n (n+k)}$$

$$\text{or } \prod_{k=0}^n (n+k) = \prod_{j=n}^{2n} j \text{ avec le changement d'indice } j = n+k \text{ (} k=0 \Rightarrow j=n \text{ et } k=n \Rightarrow j=2n)$$

$$\text{donc } \prod_{k=0}^n (n+k) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} j \prod_{j=n}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n-1} j} = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n-1} j} = \frac{(2n)!}{(n-1)!}$$

$$\text{finalement } \prod_{k=0}^n \left(\frac{2}{n+k} \right) = \frac{2^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n-1)!}} = \frac{2^{n+1}(n-1)!}{(2n)!}$$

Exercice 17 - factorielle - 4

On pose $C = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)$ et $D = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times 2n$ (cf. exercice 1).

a) Ecrire D sous la forme d'une factorielle et d'une puissance.

$$D \text{ est le produit des entiers de } 2 \text{ à } 2n, D = \prod_{k=1}^n 2k$$

$$\text{or } \prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n! \text{ de manière analogue à l'exercice 12.a)}$$

b) En déduire que $C = \frac{a!}{2^n b!}$ où a et b sont deux entier à préciser.

$$\text{On remarque } CD = \prod_{k=1}^{2n+1} k = (2n+1)!$$

$$\text{or } D = 2^n n! \text{ donc } C 2^n n! = (2n+1)! \text{ et donc } C = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 18 - produit télescopique

Calculer $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$

Il s'agit d'un produit télescopique, on peut donc utiliser la propriété du cours.

En posant $a_k = k$, on a alors $a_{k+1} = k + 1$ et donc $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{n+1}{1} = n+1$

On peut aussi le démontrer sans la propriété : $\frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(\prod_{k=1}^{n-1} (k+1)) \times (n+1)}{n!}$

or par changement d'indice $\prod_{k=1}^{n-1} k+1 = \prod_{i=2}^n i = \prod_{i=1}^n i = n!$

donc $\frac{\prod_{k=1}^n k+1}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{n! \times (n+1)}{n!} = n+1$

Sommes doubles

Exercice 19

Calculer les sommes suivantes :

b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p i + \sum_{j=1}^p j \right) = \sum_{i=1}^n \left(p \times i + \frac{p(p+1)}{2} \right) = \sum_{i=1}^n p \times i + \sum_{i=1}^n \frac{p(p+1)}{2}$

donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (i+j) = p \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{p(p+1)}{2} = \frac{np(n+p+2)}{2}$