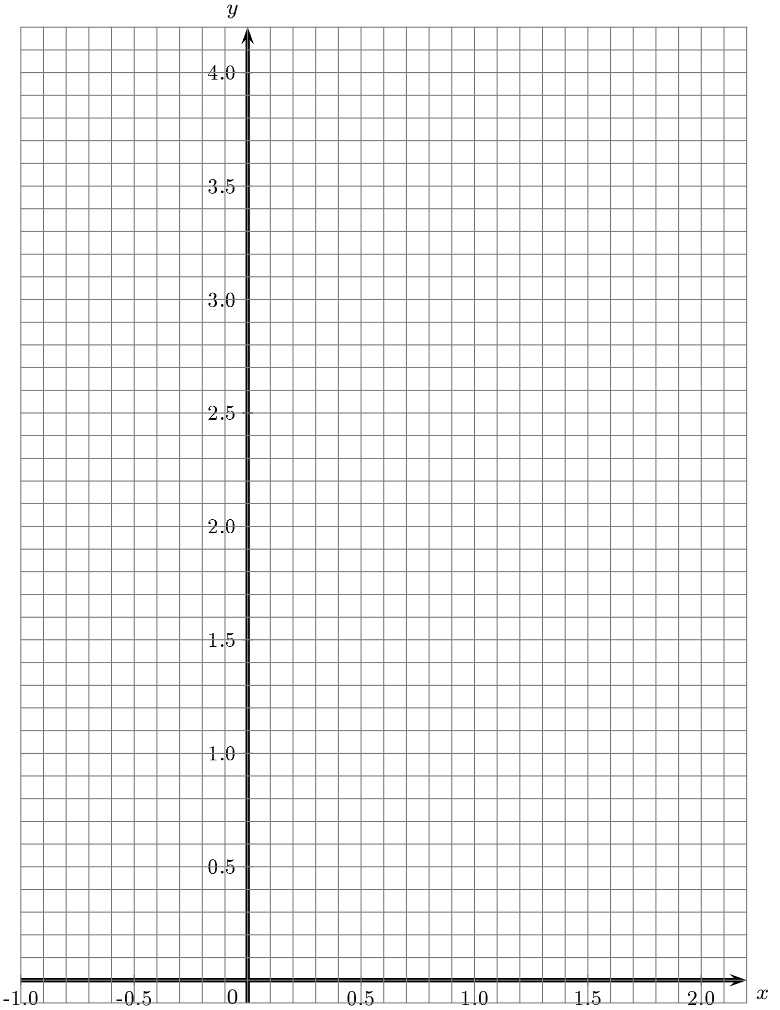
ECG 1a **Représentation graphique et variations de suites récursives** 16 octobre 2023

Exercice 1 - avec la fonction carré

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$



1. On peut écrire la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Avec quelle fonction ?

2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1; 2]$. On représentera aussi la droite d'équation $y = x$.

3. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les différents cas suivants :

a. en prenant $u_0 \in]0; 1[$

b. en prenant $u_0 > 1$

c. en prenant $u_0 \in] - 1; 0[$

4. Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$?

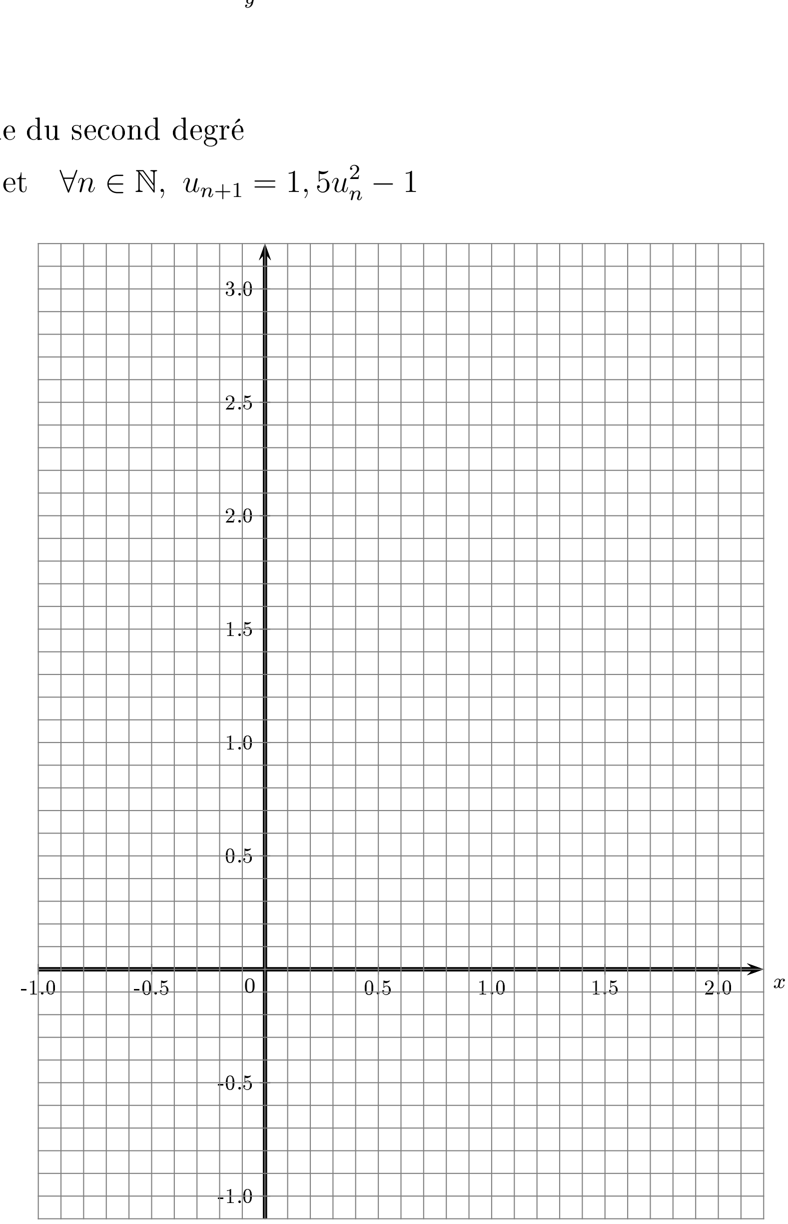
5. En général, peut-on affirmer « si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par : $u_0 \in I$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » ?

6. Etudier le signe de $f(x) - x$. Peut-on en déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

7. Selon les valeurs de u_0, peut-on émettre une hypothèse sur une limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 - même chose avec un polynôme du second degré

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1$



1. On peut écrire la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Avec quelle fonction ?

2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1;2]$. On représentera aussi la droite d'équation $y = x$.

3. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les différents cas suivants :

a. en prenant $u_0 > 1,2$

b. en prenant $u_0 \in]-1;0[$

c. en prenant $u_0 \in]0;1,2[$

4. Quel est le sens de variation de f sur $]-1;0[$?

5. En général, peut-on affirmer « si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par : $u_0 \in I$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante » ?

6. Etudier le signe de $f(x) - x$. Peut-on en déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

7. Selon les valeurs de u_0, peut-on émettre une hypothèse sur une limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.