**Plan de travail**

| **Notion** | **Exercices a minima** | **Mais aussi** |
|---|---|---|
| Variations et suites bornées | 1, 2, 5 | 3, 4 |
| Suites arithmético-géométriques | 6, 7 c) | 10 |
| Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 | 7 d) e) | 8, 12 |
| Etudes de suites | 7 a) b),11, D.L. n°3 | 9, 13, 14 |

**Exercice 1**

Indiquer si les suites ci-dessous (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont majorées et minorées. Préciser des minorants et majorants éventuels.

$u_n = \dfrac{1}{2n}$ $\qquad v_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ $\qquad w_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$

**Exercice 2**

Etudier la monotonie de la suite $u$ (définie sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) dans les cas suivants.

1. $u_n = n - n^2$
2. $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$
3. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$
4. $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$
5. $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+3^k)$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

**Exercice 3** - variations

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{3}{k^2}\right)$

**Exercice 4** - suite bornée

Montrer que la suite $u$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+3}{3n+2}$ est bornée.

**Exercice 5** - variations

Soit la suite $u$ définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Montrer que la suite $u$ est strictement décroissante.

**Exercice 6** - suite arithmético-géométrique

Déterminer la formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 0$

**Exercice 7** - pour s'échauffer

Donner les formules explicites des suites suivantes :

a) $b_1 = 3$ et $2b_n = b_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$
b) $c_{k+1} - c_k = 3$ et $c_1 = 10$ $(k > 0)$
c) $3u_j - 2u_{j-1} = 1$ et $u_0 = 0$ $(j \geqslant 1)$
d) Pour $n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0, f_0 = f_1 = 1$
e)$\forall p \in \mathbb{N}, h_{p+2} = 2h_p$ et $h_0 = 1$ et $h_1 = 0$

**Exercice 8** - des formules explicites moins explicites

Donner les formules explicites des suites suivantes :

a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} u_n$

b) $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

**Exercice 9** - suite récurrente d'ordre 2

On définit la suite $u$ par $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{4}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$. En déduire sa limite.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure.

**Exercice 10** - suite auxiliaire, vers une suite arithmético-géométrique

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ pour $n \geqslant 0$

Reconnaître la suite $v$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$

**Exercice 11** - encore une suite auxiliaire

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 0, u_{n+1} = (u_n)^3$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v$ définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour $n \geqslant 0$

Montrer que $v$ est bien définie, puis la reconnaître. Déterminer alors l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$

**Exercice 12** - suite auxiliaire et ordre 2

On définit la suite $u$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Reconnaître la suite $(\ln(u_n))$ et expliciter $\ln(u_n)$ puis $u_n$

**Exercice 13** - suite auxiliaire et arithmétique

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant u_n < 2$
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est définie et arithmétique
3. En déduire l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$

**Exercice 14** - suite auxiliaire et géométrique

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout $n, u_n \neq 1$
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et géométrique. En déduire l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$