Quelques corrigés

Exercice 7 - pour s'échauffer

Donner les formules explicites des suites suivantes :
d) Pour $n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0, f_0 = f_1 = 1$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $2x^2 + x - 1 = 0$
Les racines de l'équation sont -1 (racine évidente) et $\dfrac{1}{2}$ (en posant $2(x+1)(x-x_2) = 2x^2 + x - 1$ on trouve $x_2 = \dfrac{1}{2}$)
donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda(-1)^n + \mu\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lambda(-1)^n + \mu\dfrac{1}{2^n}$
en particulier, $f_0 = 1$ et $f_1 = 1$ donc $\lambda(-1)^0 + \mu\dfrac{1}{2^0} = 1$ et $\lambda(-1)^1 + \mu\dfrac{1}{2^1} = 1$
soit $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ -\lambda + \dfrac{\mu}{2} & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} \lambda & = & 1 - \mu & \\ \dfrac{3}{2}\mu & = & 2 & L_1 + L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & 1 - \mu \\ \mu & = & 2 \times \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -\dfrac{1}{3} \\ \mu & = & \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$
finalement $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = -\dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{3}\left(-(-1)^n + \dfrac{4}{2^n}\right) = \dfrac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + \dfrac{1}{2^{n-2}}\right)$

Exercice 8 - des formules explicites moins explicites

Donner les formules explicites des suites suivantes :

a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2}u_n$

Option A : on devine la formule explicite et on la démontre par récurrence
pour trouver la formule, on peut étudier les premiers termes $u_1 = \dfrac{2 \times 0 + 2}{0 + 2} \times u_0 = \dfrac{2}{2} \times 1 = 1$
de même $u_2 = \dfrac{2 \times 1 + 2}{1 + 2} \times u_1 = \dfrac{4}{3} \times 1 = \dfrac{4}{3}$
$u_3 = \dfrac{2 \times 2 + 2}{2 + 2} \times u_2 = \dfrac{6}{4} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$
et $u_4 = \dfrac{2 \times 3 + 2}{3 + 2} \times u_3 = \dfrac{8}{5} \times 2 = \dfrac{16}{5}$
on remarque une régularité au numérateur qui vaut 2^n et en écrivant $u_3 = 2 = \dfrac{2^3}{4}$, on remarque également la régularité au dénominateur qui vaut $n+1$, d'où la proposition suivante
pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $P(n) : u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_0 = \dfrac{2^0}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie
Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
par définition de la suite $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2}u_n$ or par hypothèse de récurrence $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$
donc $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} \times \dfrac{2^n}{n+1} = \dfrac{2(n+1) \times 2^n}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{2^{n+1}}{n+2}$ ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

Option B : produit télescopique
on peut remarquer dans un premier temps que la définition de la suite entraine $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

pour bien le démontrer on fait une récurrence (qui est presque immédiate) : $u_0 > 0$ (initialisation) et si $u_n > 0$ alors $n \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{2n+2}{n+2} > 0$ et donc $u_{n+1} > 0$ (hérédité).

alors la relation récursive s'écrit :

$\forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{2k+2}{k+2} = \dfrac{2(k+1)}{k+2}$ et donc pour $n \geqslant 1, \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2}$

or d'une part $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_0} = u_n$ par propriété sur les produits télescopiques et car $u_0 = 1$

et d'autre part $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = \prod_{k=0}^{n-1} 2\frac{k+1}{k+2} = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}$

et soit on écrit, avec $a_k = k+1$ et donc $a_{k+1} = k+1$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ par télescopage

soit avec le changement d'indice $j = k+1$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} = \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n}(j+1)}$

or $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(j+1) = \prod_{i=2}^{n+1} i$ par changement d'indice ($i = j+1$) donc $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(j+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$ car $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} i = 1 \times \prod_{i=2}^{n+1} i$

de plus $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j = n!$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} i = (n+1)! = (n+1)n!$

donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$ et donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = 2^n \times \frac{1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$

finalement $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = u_n$ et ce produit est égal à $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{2^n}{n+1}$

d'où $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ et cette formule est en fait aussi valable pour $n = 0$

b) $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

Comme pour la précédente, on va évoquer deux options.

Option A : on devine la formule explicite et on la démontre par récurrence

pour trouver la formule, on peut étudier les premiers termes $u_2 = \sqrt{u_1^2 + \dfrac{1}{2^1}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

de même $u_3 = \sqrt{u_2^2 + \dfrac{1}{2^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{7}{4}} \left(= \sqrt{\dfrac{2^3 - 1}{2^2}} \right)$

et $u_4 = \sqrt{u_3^2 + \dfrac{1}{2^3}} = \sqrt{\dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{8}} = \sqrt{\dfrac{15}{8}} \left(= \sqrt{\dfrac{2^4 - 1}{2^3}} \right)$

on remarque une régularité d'où la proposition suivante

pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $P(n) : u_n = \sqrt{\dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{\dfrac{2^1 - 1}{2^{1-1}}} = \sqrt{\dfrac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie

par définition de la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

or par hypothèse de récurrence $u_n = \sqrt{\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}}$ donc $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{\dfrac{2^{n+1}-2}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}}$

donc $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}}$ ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e. $u_n = \sqrt{\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}}$

Option B : somme télescopique

pour cela, il faut d'abord élever au carré l'égalité qui définit la suite :

pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \Rightarrow u_{n+1}^2 = u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}$

et donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \dfrac{1}{2^n}$ ce qui se prête à générer une somme télescopique :

pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et même $n \geqslant 2$ en fait), on va calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right)$

d'après l'égalité précédente $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

or d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = u_n^2 - u_1^2$ par télescopage et $u_1 = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = u_n^2 - 1$

d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

donc finalement $u_n^2 - 1 = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$, soit $u_n^2 = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et enfin $u_n = \sqrt{2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}$

et la formule est également valable pour $n = 1$ puisque $u_1 = 1$

Exercice 9 - suite récurrente d'ordre 2

On définit la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{4}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$. En déduire sa limite.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et son équation caractéristique est $3x^2 - 2x - 1 = 0$ cette équation admet pour racine évidente 1 et de fait la deuxième est déduite de $3(x-1)(x-x_2) = 3x^2 - 2x - 1$ d'où $3x_2 = -1$ et donc $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda 1^n + \mu \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \lambda + \mu \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n =$

en particulier, $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{4}{3}$ donc $\lambda + \mu \left(-\dfrac{1}{3}\right)^0 = 0$ et $\lambda + \mu \left(-\dfrac{1}{3}\right)^1 = 1$

soit $\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda - \dfrac{\mu}{3} & = & \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = & -\mu \\ \dfrac{4}{3}\mu & = & -\dfrac{4}{3} \end{cases} L_1 - L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = & -\mu \\ \mu & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & -1 \end{cases}$

finalement $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n =$

pour la limite nous verrons plus tard que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ quand $|q| < 1$, donc ici $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

car $\left|-\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$

de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

2. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure.

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant 1 + \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right|$ d'après l'inégalité triangulaire

or $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{|(-1)|^n}{|3^n|} = \frac{1}{3^n}$ donc $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| \leqslant 1$ car $3^n \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leqslant 1$

donc $|u_n| \leqslant 2$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné et de fait l'ensemble E aussi.

Nous n'avons pas vu la notion de bornes supérieure et inférieure, il s'agit en fait de trouver les meilleurs majorant et minorant

pour cela on peut remarquer que $u_n = 1 - \frac{1}{3^n}$ si n est pair et $u_n = 1 + \frac{1}{3^n}$ si n est impair et on peut montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

de fait $u_0 = 0$ est un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc un minimum et donc la borne inférieure, et de même $u_1 = \frac{4}{3}$ en est la borne supérieure.

Exercice 10 - suite auxiliaire, vers une suite arithmético-géométrique

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour $n \geqslant 0$.

Reconnaître la suite v. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Pour trouver quel type de suite remarquable est $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche un lien entre v_{n+1} et v_n

pour $n \in \mathbb{N}$, par définition $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}}$ donc $v_{n+1} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}}$ par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

donc $v_{n+1} = \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique

on cherche dans un premier temps un point fixe : $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 1$

on introduit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - 1$

soit $n \in \mathbb{N}$, par définition $w_{n+1} = v_{n+1} - 1$ donc par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$w_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$

donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de plus $w_0 = v_0 - 1$ et $v_0 = \frac{u_0}{3^0} = 0$ donc $w_0 = -1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (-1) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

or $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = w_n + 1$ donc $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{3^n} \Rightarrow u_n = 3^n v_n$ donc $u_n = 3^n\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 3^n\left[1 - \frac{2^n}{3^n}\right] = 3^n - 3^n \times \frac{2^n}{3^n} = 3^n - 2^n$

Exercice 12 - suite auxiliaire et ordre 2

On définit la suite u par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Il faut procéder par récurrence double ici (que nous n'avons pas vue) : il faut modifier l'initialisation qui contient alors deux rangs, puis de même pour l'hérédité, on fait l'hypothèse sur deux rangs consécutifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ »

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies
alors par hypothèse, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ donc u_{n+2} est bien défini, de plus $u_n u_{n+1} > 0$ donc $\sqrt{u_n u_{n+1}} > \sqrt{0}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, i.e. $u_{n+2} > 0$
donc $P(n+2)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n est bien défini et $u_n > 0$

2. Reconnaître la suite $(\ln(u_n))$ et expliciter $\ln(u_n)$ puis u_n

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition de u, $\ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_n \times u_{n+1}}) = \ln\left[(u_n \times u_{n+1})^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\ln(u_n \times u_{n+1})$

et donc $\ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1} + \ln(u_n)$ par propriétés sur le logarithme

en posant $v_n = \ln(u_n)$, on reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

on étudie l'équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ donc le discriminant vaut

$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ donc $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$

donc $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu 1^n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu$

or $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$ et $v_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$ donc $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + \mu = \ln(2)$

en combinant les deux équations (différence), on trouve $\frac{3}{2}\lambda = -\ln(2)$, soit $\lambda = -\frac{2}{3}\ln(2)$

et donc $\mu = -\lambda = \frac{2}{3}\ln(2)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{3}\ln(2)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

or $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = e^{v_n} = \exp\left[\frac{2}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$ que l'on peut écrire $u_n = 2^{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}$

Exercice 13 - suite auxiliaire et arithmétique

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant u_n < 2$.

On procède par récurrence en définissant pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $P(n)$: « u_n est bien défini et $1 \leqslant u_n < 2$ »

Initialisation : u_1 est bien défini et $u_1 = 1$ donc $1 \leqslant u_1 < 2$ donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
d'une part comme $u_n < 2$, alors $u_n - 3 < -1$ donc $u_n - 3 \neq 0$ et donc u_{n+1} est bien défini
on peut écrire $\dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} = \dfrac{u_n - 3 - 1}{u_n - 3} = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 3} - \dfrac{1}{u_n - 3} = 1 - \dfrac{1}{u_n - 3}$
or par hypothèse de récurrence $1 \leqslant u_n < 2$ donc $-2 \leqslant u_n - 3 < -1$ donc $-\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{u_n - 3} > -1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{u_n - 3} < 1$ donc $0 \leqslant -\dfrac{1}{u_n - 3} < 1$
donc $1 \leqslant 1 - \dfrac{1}{u_n - 3} < 2$ soit $1 \leqslant u_{n+1} < 2$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie, i.e. $1 \leqslant u_n < 2$

2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est définie et arithmétique

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie car d'après la question **2.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ et donc $u_n - 2 \neq 0$
de plus, par définition, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3}}$ par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3} - 2} = \dfrac{1}{\frac{u_n - 4 - 2(u_n - 3)}{u_n - 3}} = \dfrac{u_n - 3}{-u_n + 2} = \dfrac{u_n - 2 - 1}{-u_n + 2} = \dfrac{u_n - 2}{-u_n + 2} + \dfrac{-1}{-u_n + 2}$
donc $v_{n+1} = -1 + \dfrac{1}{u_n - 2} = v_n - 1$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison -1

3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison -1 donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 + (n-1) \times (-1)$
or $v_1 = \dfrac{1}{u_1 - 2} = \dfrac{1}{1 - 2} = \dfrac{1}{-1} = -1$
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = -1 - (n-1) = -n$
or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$, de fait (comme $v_n \neq 0$) $u_n - 2 = -\dfrac{1}{n}$ et donc $u_n = 2 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n - 1}{n}$

Exercice 14 - suite auxiliaire et géométrique

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{u_n+4}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

$u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1}$ est bien défini et $u_{n+1} > 0$, donc par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.

2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout $n, u_n \neq 1$.

$u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3+2u_n}{u_n+4} = 1 \Leftrightarrow 3+2u_n = u_n+4$ (car $u_n+4 \neq 0$) $\Leftrightarrow 2u_n - u_n = 4-3 \Leftrightarrow u_n = 1$
De fait comme $u_0 \neq 1$, on en déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et géométrique. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n > 0$ donc $u_n + 3 \neq 0$ et donc v_n est bien défini.
De plus, par définition $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}$ et d'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{3+2u_n}{u_n+4} - 1}{\dfrac{3+2u_n}{u_n+4} + 3} = \frac{\dfrac{3+2u_n-u_n-4}{u_n+4}}{\dfrac{3+2u_n+3u_n+12}{u_n+4}} = \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5}\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{1}{5}v_n$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n v_0$

or $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{1}{5}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{5^{n+1}}$

Reste à revenir à u_n : de $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$, on déduit $v_n(u_n+3) = u_n - 1$

donc $3v_n + 1 = u_n - u_n v_n = u_n(1-v_n)$

donc $u_n = \dfrac{3v_n+1}{1-v_n}$ (possible car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{3\dfrac{1}{5^{n+1}}+1}{1-\dfrac{1}{5^{n+1}}}$ que l'on peut aussi écrire $u_n = \dfrac{3+5^{n+1}}{5^{n+1}-1}$