Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Racine et factorisation	1, 2, 4	3, 8
Polynôme nul	12	11
Binôme de Newton	14	15, 16
Manipuler des polynômes	6, 7, 9, 13	5, 10

Exercice 1

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - x - 2$

1. Prouver que P est factorisable par $x - 1$

2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

3. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

Factoriser les polynômes
$P(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$ et $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$
puis résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations $P(x) \geqslant 0$ et $Q(x) \geqslant 0$

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

1. Déterminer toutes les racines de P

2. Ecrire P sous forme scindée, c'est-à-dire « factorisée » :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Exercice 4

Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Vérifier que P peut être factorisé par $(x + 2)$

2. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

3. En déduire toutes les racines de P

4. Résoudre les équations :

- **a.** $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$
- **b.** $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$

Exercice 6

1. Soit le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = (x-2)^4$

- **a.** Calculer $P'(2), P''(2), P'''(2)$ (on note aussi $P^{(1)}(2), P^{(2)}(2), P^{(3)}(2)$)
- **b.** Calculer $P^{(4)}(2)$ et $P^{(5)}(2)$

2. Généralisation : soit P le polynôme $P(x) = (x-a)^n$ défini pour $n > 0$
Calculer $P^{(k)}(a)$ pour tout $k > 0$

Exercice 7

Résoudre l'équation $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

Exercice 8

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$$

1. Factoriser P au maximum.

2. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$

3. Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle suivante :

$$(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7\ln x + 2 > 0$$

Exercice 9

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 possédant deux racines réelles α et β

1. Factoriser le polynôme P puis en développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c. Que deviennent ces relations quand $a = 1$?
2. Réciproquement, soient α et β deux nombres réels distincts. On pose $S = \alpha+\beta$ et $P = \alpha\beta$. Montrer que α et β sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - Sx + P$, que se passe-t-il si $\alpha = \beta$?
3. Applications :
   - **a.** Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus agé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et le produit de leurs âges est égal à 192.(*indication* : $28^2 = 784$).
   - **b.** Résoudre le système $\begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln x \times \ln y = 4 \end{cases}$

Exercice 10

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On considère le polynôme P défini par : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 x^k}{k!}$

1. Déterminer le polynôme dérivé P', et calculer $P'(0)$, ainsi que le coefficient dominant de P'
2. Déterminer le polynôme P'', et calculer $P''(0)$ ainsi que le coefficient dominant de P''

Exercice 11

Soit n un entier tel que $n \geqslant 4$. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq n-2} \frac{x+k}{k+1}$$

Déterminer les racines de P dans l'intervalle $[0; n]$. P peut-il admettre des racines en dehors de cet intervalle ?

Exercice 12

Soit n un entier naturel non nul. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2) e^k (P(k-1))^2 = 0$$

Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 13 - des fractions de polynômes, les fractions rationnelles

Déterminer les réels a, b, c, d, e tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}, \quad \frac{2x^4}{x^3 - x} = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x} + \frac{e}{x+1}$$

Formule du binôme (et polynômes)

Exercice 14 - Cas pratiques

1. Calculer en fonction de l'entier naturel n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 5^{k+1} \times 3^{n-k}$$
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} \times 5^{n-k}$$
2. Développer $P(x) = (-1 + 3x)^5$ et $R(x) = (x-2)^6$ (pour $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 15 - polynômes et sommes des coefficients binomiaux

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(x) = (1+x)^n (1+x)^n$

1. Développer $(1+x)^n$
2. Développer $(1+x)^{2n}$
3. De deux manières différentes évaluer le coefficient de x^n dans $P(x)$
4. Exprimer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (comme un seul coefficient binomial).

Exercice 16 - un peu pareil

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Rappeler le développement de $P(x) = (1+x)^n$
2. Calculer $P(1)$ et $P(-1)$
3. En déduire les valeurs de :
$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{k, 0 \leqslant 2k \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k} \text{ et}$$
$$T_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = \sum_{k, 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k+1}$$