Corrigés des exercices ou questions non abordés en classe.

Exercice 10 - une extension de la formule de Pascal

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. A l'aide des coefficients binomiaux, dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

   a. a et b ; **b.** a mais pas b ; **c.** b mais pas a ; **d.** ni a, ni b.

2. En déduire la relation $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

   On va chercher à dénombrer de deux façons les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

   - d'une part on sait qu'il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments.
   - d'autre part, on va raisonner en isolant 2 éléments de l'ensemble. Si on note $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ les éléments de l'ensemble, alors on dénombre séparément les parties à p éléments qui contiennent :

     ▷ a_1 et a_2 : il y en a $\binom{n-2}{p-2}$ car pour compléter a_1 et a_2 pour en faire une partie à p éléments, il faut en choisir $p-2$ parmi les $n-2$ que sont $a_3, \ldots, a_n$;

     ▷ a_1 mais pas a_2 : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$ car pour compléter a_1 pour en faire une partie à p éléments, il faut en choisir $p-1$ parmi les $n-2$ que sont $a_3, \ldots, a_n$;

     ▷ a_2 mais pas a_2 : de même $\binom{n-2}{p-1}$ (a_1 et a_2 ont un rôle symétrique) ;

     ▷ ni a_1, ni a_2 : il y en a $\binom{n-2}{p}$ car pour compléter les 0 éléments pour en faire une partie à p éléments, il faut en choisir p parmi les $n-2$ que sont $a_3, \ldots, a_n$

     Avec ce découpage, on obtient bien toutes les parties à p éléments de l'ensemble à n éléments puisque une telle partie se retrouve forcément dans l'un des quatre cas précédents et dans un seul (pas de double compte).

   Finalement, les deux dénombrements aboutissant au même résultat (nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments), on trouve :
   $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule de Pascal.

   D'après la formule de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

   et en l'appliquant à nouveau :
   $\binom{n-1}{p-1} = \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1}$ et $\binom{n-1}{p} = \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

   donc $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

   i.e. $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

Exercice 12 - dans un livre

Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre (exprimer à l'aide des coefficients binomiaux) ?
2. Pour $k = 3, \ldots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que : $\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

On peut reprendre l'idée d'un livre à $n+1$ chapitres parmi lesquels on en choisit $p+1$.
On classe nos combinaisons de chapitres de la même façon : C_k désigne l'ensemble des combinaisons à $p+1$ chapitres dont le plus grand numéro de chapitre vaut k.
On ne s'intéressera donc que aux C_k pour $k \geqslant p+1$ (les autres sont vides). Ces ensembles forment une partition de l'ensemble C des combinaisons à $p+1$ chapitres : la réunion des C_k est égale à cet ensemble et les C_k sont deux à deux disjoints.
De fait $\operatorname{card} C = \sum\limits_{k=p+1}^{n+1} \operatorname{card} C_k$, i.e. $\dbinom{n+1}{p+1} = \sum\limits_{k=p+1}^{n+1} \dbinom{k-1}{p}$
En effet quand le numéro de chapitre maximal est k, il y a déjà un chapitre de choisi et il en reste donc p à choisir parmi les numéros allant de 1 à $k-1$.
or $\sum\limits_{k=p+1}^{n+1} \dbinom{k-1}{p} = \sum\limits_{i=p}^{n} \dbinom{i}{p}$ changement d'indice $i = k-1$
donc finalement $\sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1}$

Exercice 15 - formule de Pascal généralisée - bis

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

1. Montrer par récurrence que $\sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1}$

La récurrence porte sur n. Comme d'habitude, il est souhaitable d'écrire l'hypothèse de récurrence, mais encore plus dans ce cas où elle contient une autre variable : p.
Pour $n \in \mathbb{N}$ (on commence même à 0, la formule est également valable), on définit l'assertion $P(n)$: $\forall p \in [\![0;n]\!], \sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1}$
$P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{0} \dbinom{k}{0} = \dbinom{0+1}{0+1} \Leftrightarrow \dbinom{0}{0} = \dbinom{1}{1}$ (p vaut forcément 0 quand $n=0$).
Ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie. Soit $p \in [\![0;n+1]\!]$
alors $\sum\limits_{k=p}^{n+1} \dbinom{k}{p} = \sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} + \dbinom{n+1}{p}$ par linéarité
donc $\sum\limits_{k=p}^{n+1} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1} + \dbinom{n+1}{p}$ par hypothèse de récurrence
donc $\sum\limits_{k=p}^{n+1} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+2}{p+1}$ d'après la formule de Pascal
donc $P(n+1)$ est vraie et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. Retrouver cette formule à l'aide du triangle de Pascal.

En regardant le triangle de Pascal réalisé dans le cours (ci-contre) et en prenant par exemple $n=5$ et $p=2$, on trouve :

- d'une part : $\sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \sum\limits_{k=2}^{5} \dbinom{k}{2}$
$= \dbinom{2}{2} + \dbinom{2}{3} + \dbinom{2}{4} + \dbinom{2}{5}$
$= 1+3+6+10 = 20$
- d'autre part $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{6}{3} = 20$

$n \diagdown p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

La formule est donc vérifiée sur cet exemple, on peut en tester beaucoup d'autres...

Exercice 16 - vu dans le chapitre sur les polynômes.

Exercice 17 - somme des coefficients binomiaux au carré

Soit n un entier non nul. On considère l'arbre modélisant la répétition de $2n$ épreuves aléatoires identiques d'un schéma de Bernoulli.

1. Dans cet arbre, quel est le nombre de chemins avec exactement n succès ?

   Un schéma de Bernoulli correspond à la répétition (ici $2n$ fois) de manière indépendante d'une épreuve de Bernoulli, i.e. une épreuve ne comprenant que deux issues que l'on résume généralement en succès et échec.
   Pour aboutir à n succès (par exemple n fois pile) sur $2n$ expériences (avec l'exemple $2n$ lancers d'une pièce), on a donc $\binom{2n}{n}$ combinaisons (nombre de façons d'avoir n lancers qui donnent pile sur les $2n$ lancers).

2. **a.** Quel est le nombre de chemins permettant d'obtenir 0 succès lors des n premières épreuves, puis n succès lors des n dernières épreuves ?

   Il n'y en a qu'un, on n'a qu'un seul choix pour les n premières (face avec le même exemple) et un seul choix pour les n dernières (pile).

   b. Dans cet arbre, que vaut le produit $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ pour k entier naturel compris entre 0 et n ?

   On peut l'interpréter comme le fait d'avoir k succès (pile) lors des n premières épreuves et $n-k$ succès pour les n dernières.
   Quel que soit le nombre k choisi, c'est une façon d'aboutir à n succès.

3. Déduire des questions précédentes l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ en fonction de n.

   En assemblant les réponses précédentes, on peut découper les chemins donnant n succès parmi $2n$ épreuves en la réunion, pour k allant de 0 à n, des chemins donnant k succès lors des n premières épreuves et $n-k$ succès pour les n dernières.
   Comme il s'agit d'une partition de l'ensembles des chemins aboutissant à n succès, on en déduit :
   $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$, or pour tous n et k, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
   donc $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Exercice 18 - formule de Vandermonde plus difficile

1. une urne contient 8 jetons : 3 rouges et 5 noirs.
   En calculant de 2 façons le nombre de tirages de 2 jetons, montrer que : $\binom{8}{2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i}\binom{5}{2-i}$

   D'une part le nombre de façons de tirer 2 jetons parmi 8 est $\binom{8}{2}$, mais on peut aussi étudier les combinaisons selon le nombre de jetons rouges qu'elles contiennent, il y a 3 possibilités :
   - aucun jeton rouge, il y a alors 2 jetons noirs à choisir parmi les 5, donc $\binom{5}{2}$ combinaisons aboutissent à cette possbilité ;
   - un jeton rouge, à choisir parmi 3, et pour chacun de ces choix, il y a alors 1 jeton noir à choisir parmi les 5, donc $\binom{3}{1}\binom{5}{1}$ combinaisons aboutissent à cette possbilité ;
   - deux jetons rouges (donc aucun noir), à choisir parmi 3, soit $\binom{3}{2}$ combinaisons qui aboutissent à cette possbilité.

   Finalement $\binom{8}{2} = \binom{5}{2} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{3}{2} = \binom{3}{0}\binom{5}{2} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{5}{1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i}\binom{5}{2-i}$

2. Montrer de 2 manières que $\binom{n+p}{k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$ (avec $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leqslant \min(n,p)$) :

a) par une démonstration ensembliste.
Indication : on pourra s'intéresser à deux ensembles respectivement de n et p éléments, constituant un ensemble à $n+p$ éléments.

En reprenant l'exemple précédent, on considère une urne contenant n jetons rouges et p jetons noirs, donc $n+p$ jetons au total. Et on va calculer de deux façons le nombre de tirages de k jetons.
Comme précédemment, il s'agit d'une part de $\binom{n+p}{k}$ et d'autre part, on peut choisir i jetons (pour i entre 0 et k) parmi les rouges, soit $\binom{n}{i}$ combinaisons, et de fait pour chacun de ces choix $k-i$ parmi les noirs, soit $\binom{p}{k-i}$ combinaisons.
Il faut quand même préciser un point ici : si $k > n$ (ou $k > p$). Dans ce cas, i ne peut varier que entre 0 et n (ou entre 0 et p), mais alors si $i > n$, $\binom{n}{i} = 0$ (ou si $k-i > p$, $\binom{p}{k-i} = 0$), ce qui correspond bien aux nombres de combinaisons possibles : zéro (par exemple zéro combinaisons avec $n+1$ jetons rouges).
Finalement dans tous les cas : $\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$

b) il existe d'autres démonstrations, avez-vous une idée ?

Une démonstration calculatoire (et un peu difficile) que l'on peut effectuer par récurrence sur p (en fait plus simple que sur le n, voir plus bas). Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion

$P(p) : \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0; n+p]\!], \binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$

<u>Initialisation :</u> $P(0)$ est vraie signifie que

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0; n]\!], \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{0}{k-i}$

or l'égalité équivaut à $\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\binom{0}{k-k}$ (car $\binom{0}{k-i} = 0$ pour $i < k$), ce qui est vrai.
<u>Hérédité :</u> pour $p \in \mathbb{N}$, supposons $P(p)$ vraie,
alors pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $k \in [\![0; n+p]\!]$
$\binom{n+p+1}{k} = \binom{n+p}{k} + \binom{n+p}{k-1}$ (formule de Pascal), ceci n'étant valable que pour $k > 0$, donc on prendra $k > 0$ pour la suite (car pour $k = 0$, le résultat est évident).
or par hypothèse de récurrence :

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} \text{ et } \binom{n+p}{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\binom{p}{k-1-i}$$

donc
$$\binom{n+p+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\binom{p}{k-1-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\left(\binom{p}{k-i} + \binom{p}{k-1-i}\right) + \binom{n}{k}\binom{p}{k-k}$$

donc avec Pascal encore :
$$\binom{n+p+1}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\binom{p+1}{k-i} + \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p+1}{k-i}$$
C'est sur ces dernières lignes qu'on voit l'intérêt de faire la récurrence sur p (la formule de Pascal fait apparaitre le $p+1$).
donc $P(p+1)$ est vraie et de fait, par théorème de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}, P(p)$ est vraie.

3. En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Comme la formule précédente est valable pour tous entiers naturels n et p, et k inférieur à $n+p$; en particulier, quand $p = n$ et $k = n$, on obtient : $\binom{n+n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$
i.e. $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ (car $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$)