

Exercice 1 - comité Théodule

Soit E une assemblée de n personnes ($n \geq 3$).

1. Déterminer le nombre de façons de répartir ces n personnes dans :
 - a) deux commissions disjointes (avec possiblement une vide) ?
 - b) deux commissions disjointes aucune des deux n'étant vide ?
 - c) trois commissions disjointes et aucune vide ?
2. On cherche de nouveau à faire deux commissions (A et B). On prend $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,
 - a) combien existe-t-il de possibilités avec k personnes dans la commission A ?
 - b) en faisant varier k , retrouver le résultat de la question 1.a).

Corrigé

Exercice 1 - comité Théodule

5 points

Soit E une assemblée de n personnes ($n \geq 3$).

1. Déterminer le nombre de façons de répartir ces n personnes dans :
 - a) deux commissions disjointes (avec possiblement une vide) ? 0,5 point

Chaque personne a deux choix, on a alors 2^n possibilités.
 - b) deux commissions disjointes aucune des deux n'étant vide ? 0,5 point

On peut utiliser le total précédent, auquel il faut retrancher les répartitions conduisant à une commission vide : il y en a deux (n personnes dans la première ou n personnes dans la seconde).
Finalement ici, il y a $2^n - 2$ commissions possibles.
 - c) trois commissions disjointes et aucune vide ? 2 points

Par le même raisonnement, on trouve un total de 3^n commissions possibles (en incluant des commissions vides), auquel il faut retrancher les répartitions menant à une ou deux commissions vides.
Cas d'une commission vide : il y a $\binom{3}{1} = 3$ choix possibles pour la commission vide, puis autant de répartitions qu'à la question précédente pour les deux autres commissions (elle ne peuvent pas être vides), donc $3 \times (2^n - 2)$ commissions à retrancher.
Cas de deux commissions vides : cette fois il y a $\binom{3}{2} = 3$ choix pour ces deux commissions vides mais alors une unique répartition pour la dernière (elle contient les n personnes), donc 3 commissions à retrancher.
Finalement le total ici est $T'_3 = 3^n - 3 \times (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$
2. On cherche de nouveau à faire deux commissions (A et B). On prend $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,
 - a) combien existe-t-il de possibilités avec k personnes dans la commission A ? 0,5 point

Il s'agit simplement de $\binom{n}{k}$.
 - b) en faisant varier k , retrouver le résultat de la question 1.a). 1,5 points

Regardons les répartitions à travers le nombre de personnes dans la commission A . Pour chaque répartition, la commission A contient un nombre de personnes compris entre 0 et n .
donc quand k varie entre 0 et n , la réunion des ensembles des commissions à k personnes forment une partition de l'ensemble total.
donc le total vaut $T_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ formule du binôme de Newton
on retrouve bien le résultat de la première question.