Quelques corrigés

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

1. Déterminer toutes les racines de P.

$-1, 1$ et 2 sont des racines évidentes car $P(-1) = -1 - 4 - 4 + 2 + 5 + 2 = 0$ $P(1) = 1 - 4 + 4 + 2 - 5 + 2 = 0$ et $P(2) = 2^5 - 4 \times 2^4 + 4 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 32 - 64 + 32 + 8 - 10 + 2 = 0$
donc P est factorisable par $(x+1)(x-1)(x-2)$
donc P s'écrit $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 car $\deg((x+1)(x-1)(x-2)) = 3$ donc $\deg P = 3 + \deg Q$
donc $\deg Q = \deg P - 3 = 5 - 3 = 2$ En écrivant $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, on a donc
$P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)$
$= (x^2-1)(x-2)(ax^2+bx+c) = (x^3-2x^2-x+2)(ax^2+bx+c)$
$= ax^5 + bx^4 + cx^3 - 2ax^4 - 2bx^3 - 2cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$
$= ax^5 + (b-2a)x^4 + (c-2-a)x^3 + (2a-2c-b)x^2 + (2b-c)x + 2c$
donc par identification des coefficients, entre autres $a = 1, b-2a = -4$ et $2c = 2$ donc $a = 1, b = -4 + 2a = -2$ et $c = 1$
donc $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
de fait $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3(x-2)$
donc P admet $-1, 1$ et 2 comme racines (1 est une « racine triple ».

2. Ecrire P sous forme scindée, c'est-à-dire « factorisée » : cf. **1.**

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Exercice 8

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$$

1. Factoriser P au maximum.

Il nous faut trouver des racines évidentes. On peut remarquer que aucun nombre positif ne peut être positif car on a alors une somme de terme positif $+2$ donc P ne pourra s'annuler. Il faut donc regarder du coté des nombres négatifs.
On trouve que -1 est une racine évidente car
$P(-1) = (-1)^5 + 5 \times (-1)^4 + 10 \times (-1)^3 + 11 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) + 2$
$= -1 + 5 - 10 + 11 - 7 + 2 = -18 + 18 = 0$
On trouve que -2 est une racine évidente car
$P(-2) = (-2)^5 + 5 \times (-2)^4 + 10 \times (-2)^3 + 11 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2$
$= -32 + 5 \times 16 + 10 \times (-8) + 44 - 14 + 2 = 0 + 80 - 80$
donc P peut s'écrire $P(x) = (x+1)(x+2)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 3 : $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des réels
donc $P(x) = (x^2 + 3x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
$= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + 3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 3dx + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d$
$= ax^5 + (b + 3a)x^4 + (c + 3b + 2a)x^3 + (d + 2b + 3c)x^2 + (3d + 2c)x + 2d$
donc par identification on trouve entre autres : $a = 1, b + 3a = 5, c + 3b + 2a = 10$ et $2d = 2$
donc $a = 1, b = 5 - 3 = 2, c = 10 - 6 - 2 = 2$ et $d = 1$
donc $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
-1 est également racine évidente de Q car
$Q(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
donc de même, Q peut s'écrire
$Q(x) = (x+1)(a'x^2 + b'x + c') = a'x^3 + b'x^2 + c'x + a'x^2 + b'x + c'$
$= a'x^3 + (b' + a')x^2 + c'x + b'x + c'$
donc par identification, $a' = 1, b' + a' = 2$ et $c' = 1$
donc $a' = b = c' = 1$
donc $P(x) = (x+1)^2(x+2)(x^2+x+1)$
or $x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine (son discriminant est strictement négatif : $\Delta = -3$)
donc on ne peut pas factoriser plus P

2. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ car ce trinôme n'admet pas de racine et le coefficient de x^2 est strictement positif, donc $P(x)$ est du signe de $(x+1)^2(x+2)$
de plus $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geqslant 0$
et $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$

on peut donc établir le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$		-	0	$+$		$+$	
$P(x)$		-	0	$+$	0	$+$	

3. Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle suivante :

$$(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7\ln x + 2 > 0$$

Cette inéquation n'a de sens que pour $x > 0$. Soit $x > 0$, alors
$(\ln x)^5+5(\ln x)^4+10(\ln x)^3+11(\ln x)^2+7\ln x+2 > 0 \Leftrightarrow P(\ln(x)) > 0$
or d'après **2.**, $P(X) > 0 \Leftrightarrow X \in]-2,-1[$ ou $X \in]-1,+\infty[$
donc $P(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) \in]-2,-1[$ ou $\ln(x) \in]-1,+\infty[$

$\Leftrightarrow -2 < \ln(x) < -1$ ou $-1 < \ln(x)$

$\Leftrightarrow e^{-2} < e^{\ln(x)} < e^{-1}$ ou $e^{-1} < e^{\ln(x)}$

car les fonctions exp et ln sont strictement croissantes

$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e^{-1}$ ou $e^{-1} < x$ car $e^{\ln(x)} = x$

d'où $\mathscr{S} = \left]e^{-2}, e^{-1}\right[\cup \left]e^{-1}, +\infty\right[$

Exercice 10

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On considère le polynôme P défini par : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 x^k}{k!}$

1. Déterminer le polynôme dérivé P', et calculer $P'(0)$, ainsi que le coefficient dominant de P'

On dérive terme à terme, sachant que $\forall k \in [\![1;n]\!]$ la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$, et on trouve $P'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 x^{k-1}}{(k-1)!}$

que l'on écrit $P'(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 x^i}{i!}$ avec le changement d'indice $i = k-1$

donc $P'(0) = n^2$ (seul le terme d'indice $i = 0$ de la somme donne un résultat non nul).

et le terme de plus haut degré est celui pour $i = n-1$, qui vaut $\dfrac{n^2 x^{n-1}}{(n-1)!}$ donc le coefficient dominant est $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$

2. Déterminer le polynôme P'', et calculer $P''(0)$ ainsi que le coefficient dominant de P''

On peut écrire $P'(x) = n^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 x^i}{i!}$ (on isole le terme de degré 0)

et de manière analogue, on trouve

$P''(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 i x^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 x^{i-1}}{(i-1)!}$ soit $P''(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} \frac{n^2 x^j}{j!}$

avec le changement d'indice $j = i-1$

de même on trouve $P''(0) = n^2$ et que le coefficient dominant de P'' est $\dfrac{n^2}{(n-2)!}$

Exercice 11

Soit n un entier tel que $n \geqslant 4$. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq n-2} \frac{x+k}{k+1}$$

Déterminer les racines de P dans l'intervalle $[0; n]$. P peut-il admettre des racines en dehors de cet intervalle ?

Par définition de $P, \forall k \in [\![1;n]\!], k \neq n-2, -k$ est une racine de P car il contient le terme $x+k$ en facteur d'un produit de polynômes de degré 1
de plus P est degré $n-1$ car il est constitué d'un produit de $n-1$ polynômes de degré 1
donc P ne peut admettre plus de $n-1$ racines (ce n'est pas le polynome nul) et il en admet au moins $n-1$: $-k$ pour $k \in [\![1;n]\!], k \neq n-2$, donc P admet exactement $n-1$ racines, de plus, elles sont toutes situés dans l'intervalle $[-n,-1]$, donc aucune ne se situe dans l'intervalle $[0,n]$

Nota bene : on peut répondre plus rapidement à la première question en constatant que $\forall x \geqslant 0, P(x) > 0$ (produit de termes strictement positifs, donc P ne peut admettre de racine sur $\mathbb{R}_+$ et a fortiori, il n'en admet pas sur $[0,n]$

Formule du binôme (et polynômes)

Exercice 15 - polynômes et sommes des coefficients binomiaux

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(x) = (1+x)^n(1+x)^n$

1. Développer $(1+x)^n$

D'après la formule du binôme,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

2. Développer $(1+x)^{2n}$

De même, $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$

3. De deux manières différentes évaluer le coefficient de x^n dans $P(x)$

D'après **2.**, le coefficient de x^n dans $P(x)$ est $\binom{2n}{n}$

Par ailleurs $P(x) = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)^2$

que l'on peut écrire $P(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right)$

donc $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \binom{n}{k} x^k$

donc $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \binom{n}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{k} x^{j+k}\right)$

or $\forall k \in [\![0, n]\!], j+k = n \Leftrightarrow j = n-k$

donc le coefficient de x^n dans $P(x)$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$

or $\binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$

et donc le coefficient de x^n dans $P(x)$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

4. Exprimer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (comme un seul coefficient binomial).

Par identification du coefficient de x^n dans $P(x)$, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Exercice 16 - un peu pareil

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Rappeler le développement de $P(x) = (1+x)^n$

Cf. plus haut, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

2. Calculer $P(1)$ et $P(-1)$

$P(1) = (1+1)^n = 2^n$ et $P(-1) = (1-1)^n = 0$

3. En déduire les valeurs de :

$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{k, 0 \leqslant 2k \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k}$ et

$T_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = \sum_{k, 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k+1}$

Par ailleurs, d'après **1.**, $P(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S_n + T_n$

et $P(-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k, 0 \leqslant 2k \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k} - \sum_{k, 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}^{n} \binom{n}{2k+1}$

donc $P(-1) = S_n - T_n$

finalement, d'après **2.**, $S_n + T_n = 2^n$ et $S_n - T_n = 0$

donc $S_n = T_n$ et de fait $S_n + S_n = 2^n$, i.e. $2S_n = 2^n$ et donc $S_n = 2^{n-1}$