Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Formule du crible	4	
Equiprobabilité	2	
Probabilité conditionnelle	5	6
Formule d'additivité	1, 7, 10	3
F. des probabilités composées	1, 7	
F. des probabilités totales	6, 11	9
Formule de Bayes	5, 11	
Indépendance	1, 11, 12	
Indépendance mutuelle	13	14
Divers	8, 9, 15, 16	17, 18

Calcul de probabilités

Exercice 1

Une urne contient cinq boules vertes numérotées de 1 à 5, et 4 boules rouges numérotées de 1 à 4.

1. On tire successivement et sans remise 3 boules dans l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - **a.** A :« le tirage ne contient pas de boule verte »
   - **b.** B :« on obtient exactement une boule verte et une boule numérotée 2 »
2. On tire successivement 3 boules dans l'urne, avec remise. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - **a.** A : « le tirage ne contient que des boules vertes »
   - **b.** B : « on obtient au plus 2 boules vertes »
   - **c.** C : « on obtient exactement une boule verte et une boule numérotée 2 »

Exercice 2

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules rouges numérotées de 1 à n, et n boules vertes, numérotées de 1 à n. On tire simultanément n boules dans l'urne.
Quelles sont les probabilités des événements suivants ?

a) « on obtient au moins une boule verte »
b) « on obtient exactement une boule verte »
c) « on obtient exactement 2 boules vertes »

Exercice 3

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres dans un ordre strictement croissant ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres dans un ordre croissant ?

Exercice 4

Dans une épicerie de Venise, Monica veut acheter un paquet de spaghettis et un bocal de sauce bolognaise. Dans cette épicerie, on trouve des spaghettis 6 jours sur 7 et de la sauce bolognaise 3 jours sur 4. Les deux produits se trouvent en rayon simultanément 20 jours sur 28.

1. Quelle est la probabilité que Monica ne trouve ni spaghettis ni sauce bolognaise lorsqu'elle se rend à l'épicerie ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle trouve des spaghettis, mais pas de bolognaise ?

Conditionnement

Exercice 5

Une boulangère fait brûler un pain sur 10. Son associé veut éliminer les pains trop cuits, mais il n'est pas bien réveillé : il élimine 9 pains brûlés sur 10 et il élimine aussi 4 pains bien cuits sur 45

1. Un matin, la boulangère sort un pain du four. Quelle est la probabilité que son associé l'élimine ?
2. Calculer la probabilité qu'un pain soit éliminé à tort.
3. Sachant qu'un pain n'a pas été éliminé, quelle est la probabilité qu'il soit brûlé ?

Exercice 6

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. Pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.

1. On choisit au hasard une urne, et on pioche une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de piocher une boule blanche ?
2. On choisit au hasard une urne, et on pioche successivement et avec remise 2 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité que les 2 boules obtenues soient blanches ?

Exercice 7

Trois urnes contiennent des boules blanches et noires :
- U_1 contient 2 blanches et 3 noires
- U_2 contient 4 blanches et 2 noires
- U_3 contient 6 blanches et 1 noire.

On effectue trois tirages successifs de la manière suivante :
- on tire une boule de U_1, on note sa couleur, on met cette boule dans l'urne U_2
- on tire une boule de U_2, on note sa couleur, et on met cette boule dans l'urne U_3
- on tire une boule de U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur.

Exercice 8

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil qui obéit à certaines règles.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
- si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\dfrac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n
- si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\dfrac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n

1. Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_n et p_{n-1}
2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n en fonction de p_0
3. Etudier la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 9

On s'intéresse à deux pièces de monnaie indiscernables. L'une (la pièce numéro 1) donne pile avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et l'autre (la pièce numéro 2) donne pile avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$
On effectue des lancers successifs de la façon suivante : on choisit une pièce de monnaie au hasard, on la lance. On relance la même pièce jusqu'à ce qu'elle donne face, et dès qu'on obtient face, on change de pièce et on recommence.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : « on lance la pièce 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer »
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : « on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer »
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k = P(A_k)$

1. Pour k entier tel que $k \geqslant 2$, exprimer u_k en fonction de u_{k-1}
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité u_n de lancer la pièce numéro 1 au $n^{\text{ème}}$ lancer.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n la probabilité d'obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer.
   - **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer r_n en fonction de u_n
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$

Exercice 10

Un magasin de produits cosmétiques organise un jeu pour ses clients. Une urne contient R flacons de vernis à ongle rouge et V flacons de vernis à ongle violet. Un client a gagné le droit de tirer n flacons. Comme le vernis violet ne l'intéresse pas, le client :

▷ remet le flacon après le tirage s'il s'agit de vernis violet.
▷ garde le flacon après le tirage s'il s'agit de vernis rouge.

(On suppose que R et V sont suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas épuisement de l'une des deux couleurs).
On considère les événements suivants :

- E : « le client obtient exactement un flacon de vernis rouge en n tirages »
- R_k : « le client obtient un flacon de vernis rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage » (avec $k \geqslant 1$)
- V_k : « le client obtient un flacon de vernis violet au $k^{\text{ème}}$ tirage » (avec $k \geqslant 1$)

1. Exprimer E à l'aide des R_k et des V_k
2. Calculer la probabilité de E

Exercice 11

Dans une ville dont le nom commence par un B, il pleut 7 jours sur 10
Deux stations météorologiques annoncent chaque matin les prévisions pour la journée à venir, et :

- la première station donne une prévision correcte du temps avec une probabilité de $0,8$
- la deuxième station donne une prévision correcte du temps avec une probabilité de $0,9$ et ses prévisions sont faites indépendamment de celles de la première station.

1. Si un matin la première station annonce beau temps, quelle est la probabilité qu'il fasse effectivement beau ?
2. Un matin, la première station annonce qu'il va faire beau, et la deuxième annonce de la pluie. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau ?

Indépendance

Exercice 12

(Ω, P) est un espace probabilisé fini, et soit A et B deux événements. Démontrer que, si A et B sont indépendants, alors :

1. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Indépendance mutuelle

Exercice 13

A l'issue d'une randonnée à VTT, le club organisateur offre aux participants deux boissons, à commander successivement. Les participants ont le choix entre six boissons : une bière blonde, un perrier, un coca, une Evian, un thé brûlant, un cacolac. Un participant s'avance vers le comptoir, il va faire ses choix au hasard et de manière équiprobable. On considère les événements suivants :

▷ A_1 : « il choisit une boisson à bulles pour la première tournée »
▷ A_2 : « il choisit une boisson plate pour la deuxième tournée »

▷ A_3 : « Il choisit deux boissons de même nature (soit toutes les deux à bulles, soit les deux plates) ».

Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 14

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On pioche successivement et avec remise n boules dans l'urne. On note les événements suivants

- pour $i \in [\![1, n]\!]$, B_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule piochée est blanche. »
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, A_i : « on pioche une unique boule blanche, obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage. »
- on note A l'événement : « on pioche une unique boule blanche »

1. Exprimer les A_i, et A à l'aide des B_i
2. Calculer $P(A_i)$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, et $P(A)$

Hors catégorie

Exercice 15

On considère un dé à six faces, pipé de telle sorte que :

- la probabilité d'obtenir un nombre pair est trois fois plus élévée que celle d'un nombre impair.
- l'événement « obtenir un multiple de 3 » a la même probabilité que son contraire,
- on a une chance sur quatre d'obtenir un nombre premier,
- tous les impairs ont la même probabilité de sortir.

Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

Exercice 16 - le crépier amnésique

Nous avons recruté un crépier pour célébrer la chandeleur, mais il a la fâcheuse tendance à oublier s'il a retourné sa crêpe ou non. De sorte qu'une crêpe sur deux est « mal retournée » (soit trop de fois, soit pas assez). On suppose qu'il effectue 10 crêpes.

1. Quelle est la probabilité que les 10 crêpes soient réussies (bien retournées) ?
2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement 8 crêpes ?
3. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins 7 crêpes ?

Exercices plus difficiles

Exercice 17

1. On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :
   a. exactement une dame
   b. au moins une dame *(2 méthodes possibles)*
   c. une dame et deux piques exactement.
2. Répondre aux mêmes questions en supposant que chaque carte tirée est remise dans le jeu.

Exercice 18

On dispose de trois pièces équilibrées, l'une ayant ses deux côtés blancs, les deux autres ayant une face blanche et une face noire. On prend une pièce au hasard, et on effectue n lancers indépendants de cette pièce.

- Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement : « on obtient blanc au $k^{\text{ème}}$ lancer » ;
- et on note A l'événement : « on lance la pièce blanche »

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » au premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » aux n premiers lancers ?
3. **a.** Sachant qu'on a obtenu n fois de suite « blanc », quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce unicolore ?
   b. Combien de lancers faut-il avoir effectué pour que cette probabilité soit supérieure à $0,98$?