Corrigés des exercices ou questions non abordés en classe (et un peu plus).

Calcul de probabilités

Exercice 3 (question 1 abordée en classe)

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres dans un ordre strictement croissant ?

   Pour $i \in [\![1, 10]\!]$, on définit les événements :
   - A_i : « on tire la boule i au premier tirage » ;
   - B_i : « on tire la boule i au premier tirage » ;
   - C_i : « on tire la boule i au premier tirage ».

   De plus on va appeler D l'événement « on obtient trois nombres dans un ordre strictement croissant ».

   donc $D = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant 8} A_i \cap \left[\bigcup_{i+1 \leqslant j \leqslant 9} B_j \cap \left(\bigcup_{j+1 \leqslant k \leqslant 10} C_k \right) \right]$
   $= \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant 8} \bigcup_{i+1 \leqslant j \leqslant 9} \bigcup_{j+1 \leqslant k \leqslant 10} A_i \cap B_j \cap C_k$

   or pour les valeurs de i, j et k, les événements $A_i \cap B_j \cap C_k$ sont deux à deux incompatibles (la valeur d'au moins un des trois nombres change).

   donc $P(D) = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} P(A_i \cap B_j \cap C_k)$

   de plus pour tout i, j, k, $P(A_i \cap B_j \cap C_k) = \left(\frac{1}{10}\right)^3$

   donc $P(D) = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} 1$

   or $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} 1 = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} (10 - j) = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j'=1}^{9-i} j'$ (changement d'indice $j' = 10 - j$)

   donc $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} 1 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(9-i)(10-i)}{2}$
   $= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (90 - 19i + i^2) = \frac{1}{2} \left(8 \times 90 - 19 \sum_{i=1}^{8} i + \sum_{i=1}^{8} i^2 \right)$

   donc $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=i+1}^{9} \sum_{k=j+1}^{10} 1 = \frac{1}{2} \left(720 - 19 \times \frac{8 \times 9}{2} + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \right) = 120$

   donc $P(D) = \frac{120}{1000} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres dans un ordre croissant ?

   On peut reprendre la démonstration précédente, cela change les indices de début et de fin des sommes : $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} \sum_{k=j}^{10}$

   On peut aussi ajouter les cas « d'égalité » au calcul précédent, mais ce n'est pas si facile.

Conditionnement

Exercice 7

Trois urnes contiennent des boules blanches et noires :
- U_1 contient 2 blanches et 3 noires
- U_2 contient 4 blanches et 2 noires
- U_3 contient 6 blanches et 1 noire.

On effectue trois tirages successifs de la manière suivante :
- on tire une boule de U_1, on note sa couleur, on met cette boule dans l'urne U_2
- on tire une boule de U_2, on note sa couleur, et on met cette boule dans l'urne U_3
- on tire une boule de U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur.

En notant les événements :
- B_1, B_2, B_3 : « on tire une boule blanche dans l'urne 1 (respectivement dans l'urne 2, dans l'urne 3 » ;
- N_1, N_2, N_3 : « on tire une boule blanche dans l'urne 1 (respectivement dans l'urne 2, dans l'urne 3 ».

alors l'événement A : « les trois boules tirées sont de la même couleur » s'écrit $A = (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3)$
donc $P(A) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ car les événements $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et $(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ sont incompatibles
de plus d'après la formule des probabilités composées :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$ et
$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3)$
or par définition de l'expérience : $P(B_1) = \dfrac{2}{5}$, $\quad P_{B_1}(B_2) = \dfrac{5}{7}$
$P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{7}{8}$, $\quad P(N_1) = \dfrac{3}{5}$, $\quad P_{N_1}(N_2) = \dfrac{3}{7}$, $\quad P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{2}{8}$
donc $P(A) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{7} \times \dfrac{7}{8}, + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{70+18}{5 \times 7 \times 8} = \dfrac{88}{5 \times 7 \times 8}$
donc $P(A) = \dfrac{11}{5 \times 7} = \dfrac{11}{35}$

Exercice 9

On s'intéresse à deux pièces de monnaie indiscernables. L'une (la pièce numéro 1) donne pile avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et l'autre (la pièce numéro 2) donne pile avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$.
On effectue des lancers successifs de la façon suivante : on choisit une pièce de monnaie au hasard, on la lance. On relance la même pièce jusqu'à ce qu'elle donne face, et dès qu'on obtient face, on change de pièce et on recommence.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : « on lance la pièce 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer »
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : « on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer »
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k = P(A_k)$.

1. Pour k entier tel que $k \geqslant 2$, exprimer u_k en fonction de u_{k-1}.

Il y a deux façons de lancer la pièce 1 au $k^{\text{ième}}$, soit c'est elle qui a été lancée au lancer précédent et le résultat a donné « pile », soit c'est la pièce 2 qui a été lancée au lancer précédent et le résultat a donné « face ». Mathématiquement, par propriété :
$P(A_k) = P(A_{k-1} \cap A_k) + P(\overline{A_{k-1}} \cap A_k)$
donc $P(A_k) = P(A_{k-1})P_{A_{k-1}}(A_k) + P(\overline{A_{k-1}})P_{\overline{A_{k-1}}}P(A_k)$
or par définition $P(A_{k-1}) = u_{k-1}$ et $P(A_k) = u_k$
de plus $P(\overline{A_{k-1}}) = 1 - P(A_{k-1})$
et par définition de l'expérience $P_{A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A_{k-1}}}P(A_k) = \dfrac{5}{6}$
donc $u_k = \dfrac{1}{2}u_{k-1} + \dfrac{5}{6}(1 - u_{k-1}) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{6}\right)u_{k-1} + \dfrac{5}{6} = -\dfrac{1}{3}u_{k-1} + \dfrac{5}{6}$

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité u_n de lancer la pièce numéro 1 au $n^{\text{ème}}$ lancer.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie plus haut est donc une suite arithmético-géométrique, on va donc l'expliciter selon la méthode habituelle : dans un premier temps, on cherche le point fixe :

$\alpha = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\alpha = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$
on introduit alors la suite auxiliaire définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \frac{5}{8}$

alors pour $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{6} - \frac{5}{8}$ d'après **1.**

donc $v_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{20}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{24} = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{3}v_n$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} v_1$

or $v_1 = u_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$ car $u_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$ (on choisit la pièce au hasard pour le premier lancer)

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = -\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

or $u_n = v_n + \frac{5}{8}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n la probabilité d'obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer r_n en fonction de u_n.

Concrètement, il y a deux façons de faire pile au $n^{\text{ème}}$ lancer, avec la pièce 1 ou avec la pièce 2. Mathématiquement,
par propriété : $P(B_n) = P(A_n \cap B_n) + P(\overline{A_n} \cap B_n)$
donc $P(B_n) = P(A_n)P_{A_n}(B_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}P(B_n)$
or par définition $P(B_n) = r_n, P(A_n) = u_n$ et $P(\overline{A_n}) = 1 - u_n$
et par définition de l'expérience $P_{A_n}(B_n) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A_n}}(B_n) = \frac{1}{6}$

donc $r_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{6}(1 - u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) u_n + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}$

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

La relation $r_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}$ nous permet d'expliciter r_n grâce au résultat de la question **2.**, on trouve donc
$r_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6}$ donc $r_n = \frac{5}{24} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} = \frac{9}{24} + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

donc $r_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{8}\left(3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

or $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $-1 < q < 1$)

donc par opérations (addition et produit) $r_n \to \frac{3}{8}$

Hors catégorie

Exercice 16 - le crépier amnésique

Nous avons recruté un crépier pour célébrer la chandeleur, mais il a la fâcheuse tendance à oublier s'il a retourné sa crêpe ou non. De sorte qu'une crêpe sur deux est « mal retournée » (soit trop de fois, soit pas assez). On suppose qu'il effectue 10 crêpes.

1. Quelle est la probabilité que les 10 crêpes soient réussies (bien retournées) ?

En notant R_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ crêpe est réussie ».

L'événement qui nous intéresse ici est $R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{10} = \bigcap_{i=1}^{10} R_i$

or les événements $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant 10}$ sont mutuellement indépendants

donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{10} R_i\right) = \prod_{i=1}^{10} P(R_i) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement 8 crêpes ?

En notant B cet événement,
$B = (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_8 \cap \bar{R_9} \cap \bar{R_{10}}) \cup (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_7 \cap \bar{R_8} \cap R_9 \cap \bar{R_{10}}) \cup \dots \cup (\bar{R_1} \cap \bar{R_2} \cap R_3 \cap \dots \cap R_{10})$
plus précisément il faut choisir 8 crêpes réussies parmi les 10 (ou 2 crêpes ratées parmi les 10) et il y a $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ choix
et chacun de ces choix (événements tels que $B = (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_8 \cap \bar{R_9} \cap \bar{R_{10}})$ sont incompatibles deux à deux donc
$P(B) = P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_8 \cap \bar{R_9} \cap \bar{R_{10}}) + P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_7 \cap \bar{R_8} \cap R_9 \cap \bar{R_{10}}) + \dots + P(\bar{R_1} \cap \bar{R_2} \cap R_3 \cap \dots \cap R_{10})$
or par indépendance mutuelle de $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant 10}$ et par propriété $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_8 \cap \bar{R_9} \cap \bar{R_{10}}) = P(R_1)P(R_2)\dots P(R_8)P(\bar{R_9})P(\bar{R_{10}}) = \frac{1}{2^{10}}$
de même la probabilité de chacun de ces 45 événements a pour probabilité $\frac{1}{2^n}$

donc $P(B) = 45 \times \frac{1}{2^n} = \frac{45}{2^n}$

3. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins 7 crêpes ?

De manière analogue, il y a $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$ façons de placer les 3 crêpes ratées (ou les 7 crêpes réussies) et chacune de ces combinaisons a pour probabilité $\frac{1}{2^n}$

donc la probabilité de l'événement recherchée ici est $\frac{120}{2^n}$

Exercices plus difficiles

Exercice 17

1. On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :

a. exactement une dame

Soit A l'événement « obtenir exactement une dame »
tous les tirages de trois cartes étant équiprobables,
$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$ or $\operatorname{card} \Omega = \binom{32}{3} = \frac{32 \times 31 \times 30}{3!}$
$\operatorname{card} \Omega = 32 \times 31 \times 5 = 4\,960$ (trois cartes à tirer parmi 32)
et $\operatorname{card} A = \binom{4}{1} \times \binom{28}{2} = 4 \times \binom{28}{2} = 4 \times 14 \times 27 = 1\,512$
cela correspond au tirage d'une dame parmi les quatre et de deux cartes parmi les 28 autres cartes.
donc $P(A) = \frac{4 \times 14 \times 27}{32 \times 31 \times 5} = \frac{8 \times 7 \times 27}{8 \times 4 \times 31 \times 5} = \frac{189}{620}$

b. au moins une dame *(2 méthodes possibles)*

On appelle B l'événement « au moins une dame ». Dans ce genre de situation (« au moins... »), il est intéressant de s'intéresser à l'événement contraire, $\overline{B}$ qui correspond à « n'obtenir aucune dame » ce qui revient à tirer 3 cartes parmi les 28,
donc $\operatorname{card} \overline{B} = \binom{28}{3} = \frac{28 \times 27 \times 26}{6} = 14 \times 9 \times 26 = 3\,276$

donc $P(\overline{B}) = \dfrac{2^2 \times 7 \times 9 \times 13}{8 \times 4 \times 31 \times 5} = \dfrac{7 \times 9 \times 13}{8 \times 31 \times 5} = \dfrac{819}{1240}$

et donc $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{421}{1240}$

L'autre option est de distinguer les différents cas qui réalisent l'événement B : exactement une dame, exactement deux dames, exactement trois dames et exactement quatre dames.

c. une dame et deux piques exactement.

Appelons C l'événement « obtenir une dame et deux piques exactement »

L'énoncé n'est pas totalement explicite sur le fait que les deux piques puissent contenir une dame ou non, on va considérer que oui et il y a alors deux cas :

1^er^ cas : la main contient la dame de pique

la main est alors constituée de la dame de pique, d'un autre pique (pas la dame) et d'une carte qui n'est ni un pique ni une dame

la dame de pique faisant partie du jeu, il reste à choisir un pique parmi les 7 autres (que la dame), et une carte parmi le reste des cartes (ni pique ni dame)

or il y a 11 cartes qui sont dame ou pique, donc il reste à choisir 1 carte parmi 21

donc ce cas contient $7 \times 21 = 147$ mains

2^ème^ cas : la main ne contient pas la dame de pique

dans ce cas il faut choisir 1 dame parmi les 4, deux piques parmi les 7 autres que la dame, $4 \times \dbinom{7}{2} = 4 \times \dfrac{7 \times 6}{2} = 4 \times 21 = 84$

donc au total, $\operatorname{card} C = 147 + 84 = 231$ et donc $P(C) = \dfrac{231}{4960}$

2. Répondre aux mêmes questions en supposant que chaque carte tirée est remise dans le jeu.

Il s'agit ici d'un tirage avec remise, et il y a 32^3 tirages possibles.

a. La dame peut être tirée au premier, au deuxième ou au troisième tirage. Par exemple si c'est au premier, il y a quatre possibilités pour la première carte (une parmi les quatre dames), puis 28 pour les deux tirages suivants, donc il y a $4 \times (28)^2$ qui donnent exactement une dame au premier tirage. C'est la même chose pour obtenir la dame au deuxième ou troisième tirage

donc ici $P(A') = \dfrac{3 \times 4 \times (28)^2}{(32)^3} = \dfrac{3 \times 4^3 \times 7^2}{4^3 \times 8^3} = \dfrac{147}{512}$

b. de manière analogue,

$P(\overline{B'}) = \dfrac{\times (28)^3}{(32)^3} = \dfrac{7^3}{8^3} = \dfrac{343}{512}$ donc $P(B') = \dfrac{169}{512}$

c. On s'inspire des questions **1.c** et **2.a** et on trouve

$$P(C') = \frac{3 \times 4 \times 7^2 + 6 \times 7 \times 21}{(32)^3} = \frac{6 \times 7^2(2+3)}{(32)^3}$$
$$= \frac{3 \times 5 \times 7^2}{16 \times (32)^2} = \frac{735}{16\,384}$$

Exercice 18

On dispose de trois pièces équilibrées, l'une ayant ses deux côtés blancs, les deux autres ayant une face blanche et une face noire. On prend une pièce au hasard, et on effectue n lancers indépendants de cette pièce.

- Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement : « on obtient blanc au $k^{\text{ème}}$ lancer » ;
- et on note A l'événement : « on lance la pièce blanche »

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » au premier lancer ?

Il y a deux façons d'obtenir blanc au premier lancer, avec la pièce blanche ou avec les autres
i.e. avec la propriété du cours, $P(B_1) = P(B_1 \cap A) + P(B_1 \cap \overline{A})$
soit $P(B_1) = P(A)P_A(B_1) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B_1)$
or $P(A) = \dfrac{1}{3}$ (il y a une chance sur trois que la pièce blanche soit choisie au début), $P_A(B_1) = 1$ (avec la pièce blanche, c'est à coup sûr une face blance qui sort) et $P_{\overline{A}}(B_1) = \dfrac{1}{2}$ (avec les deux autres pièces, il y a une chance sur deux de tomber sur une face blanche).
donc $P(B_1) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » aux n premiers lancers ?

De même (on s'intéresse ici à l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$)
$P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(A)P_A(B_1 \cap \cdots \cap B_n) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$
or $P_A(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = 1$ et
$P_{\overline{A}}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P_{\overline{A}}(B_1) \times \cdots \times P_{\overline{A}}(B_n)$ par indépendance mutuelle des lancers une fois la pièce choisie
donc $P_{\overline{A}}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \dfrac{1}{2^n}$
donc $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

3. a. Sachant qu'on a obtenu n fois de suite « blanc », quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce unicolore ?

La question cherche une cause, connaissant un résultat : $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(A)$ il faut donc utiliser la formule de Bayes
$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(A) = \dfrac{P(A)P_A(B_1 \cap \cdots \cap B_n)}{P(B_1 \cap \cdots \cap B_n)}$
or d'après la question **2.** $P(A)P_A(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \dfrac{1}{3}$
et $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$
donc $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(A) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$

b. Combien de lancers faut-il avoir effectué pour que cette probabilité soit supérieure à $0,98$?

D'après la question précédente,
$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(A) \geqslant 0,98 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} \geqslant 0,98$
$\Leftrightarrow \dfrac{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}{1} \leqslant \dfrac{1}{0,98} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{0,98} - 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \dfrac{1 - 0,98}{0,98} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \dfrac{0,02}{0,98} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{49}$
$\Leftrightarrow 2^{n-1} \geqslant 49 \Leftrightarrow \ln\left(2^{n-1}\right) \geqslant \ln\left(7^2\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(2) \geqslant 2\ln(7)$
$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant 2 \times \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) > 0 \Leftrightarrow n \geqslant 1 + 2 \times \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$
On peut presque le résoudre sans calculatrice :
$\ln(4) < \ln(7) < \ln(8)$ i.e. $\ln\left(2^2\right) < \ln(7) < \ln\left(2^3\right)$
donc $2\ln(2) < \ln(7) < 3\ln(2)$ et donc $2 < \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)} < 3$
enfin $5 < 1 + 2 \times \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)} < 7$, ce qui nous dit qu'à partir de 7 tirages, la condition sera remplie, mais on ne peut déterminer ainsi si 6 tirages suffisent.
Avec la calculatrice, on trouve, $1 + 2 \times \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)} > 6$ donc il faut au moins 7 lancers pour remplir la condition.