Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Image directe	1, 2, 3, 4	
Injectivité, bijectivité, surjectivité	1, 5, 6, 7, 8, 9 + D.L. n°6	10
Composition	1, 2, 5, 7, 8	10
Trouver la réciproque	9	10

Application, composition, image directe

Exercice 1

On considère les deux applications f et g de $[\![1,6]\!]$ dans lui-même définies par leur tableau de valeurs.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

1. Déterminer $g \circ g$

2. Déterminer $f \circ f$

3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

4. Déterminer $f\langle A\rangle$ avec $A = \{1, 5\}$

5. Déterminer $g\langle B\rangle$ avec $B = \{5, 6\}$

6. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2

Soit f et g les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x+6 \end{array}$$

1. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ est-elle vérifiée ?

2. Tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

3. Déterminer graphiquement $f\langle]-3, 1]\rangle$ et $g\langle [-1, 1]\rangle$

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1. Déterminer, dans les cas suivants, si le réel y admet des antécédents par f, et si oui, les déterminer.

a. $y = 0$ **b.** $y = 2$ **c.** $y = 1$ **d.** $y = \dfrac{1}{2}$

2. Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$
Retrouver graphiquement les résultats de la question 1

3. Déterminer graphiquement $f\langle [-1, 1]\rangle$ et $f\langle [0, 2[\rangle$ et $f\langle [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]\rangle$

Exercice 4

Calculer les images directes suivantes :

1. $f\langle [-1, 4]\rangle$ avec $f(x) = x^2 - x - 6$

2. $g\langle [-5, 7]\rangle$ avec $g(x) = |x-1|$

3. $h\langle [-3,5; 10]\rangle$ avec $h(x) = \lfloor x \rfloor$

4. $i\langle \mathbb{R}_+^*\rangle$ avec $i(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

Injection, surjection, bijection

Exercice 5

On considère les deux applications f et g de $[\![1,6]\!]$ dans lui-même définies par leur tableau de valeurs.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	1	2	6	4	3

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	4	2	3	4	6	5

f et g sont-elles des bijections de $[\![1,6]\!]$ dans lui-même ? Si oui, déterminer f^{-1}, g^{-1}

Exercice 6

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacune des applications f suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+2 \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+2 \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x+1| \end{array}$

6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{-1,1\} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array}$

Exercice 7

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y}{2} & \text{si } y \text{ est pair} \\ \dfrac{y-1}{2} & \text{si } y \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g

2. Préciser $g \circ f$. Est-elle injective, surjective, bijective ? De même pour $f \circ g$

Exercice 8

Soit f l'application définie, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) \neq -1$

2. Déterminer l'application $f \circ f$

3. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et préciser sa bijection réciproque

Exercice 9

Dans chaque cas, démontrer que l'application f est une bijection, et déterminer sa réciproque.

1. $f : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(2x+1)-1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-4\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+3}{x+4} \end{array}$

Exercice 10

On considère les applications f et g suivantes :

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, -x+3y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\dfrac{3a-2b}{5}, \dfrac{a+b}{5}\right) \end{array}$

Montrer que f est une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ et que g est la réciproque de f