Corrigé de l'exercice non abordé en classe.

Exercice 10

On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, -x+3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\dfrac{3a-2b}{5}, \dfrac{a+b}{5}\right) \end{array}$$

Montrer que f est une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ et que g est la réciproque de f.

f et sa réciproque, g, nous sont données, on va donc calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ pour démontrer la bijectivité et le fait que g est bien la réciproque.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+2y, -x+3y)$

donc $(g \circ f)(x,y) = \left(\dfrac{3(x+2y)-2(-x+3y)}{5}, \dfrac{(x+2y)+(-x+3y)}{5}\right)$ en remplaçant a par $x+2y$ et b par $-x+3y$ dans l'expression de $g(a,b)$

donc $(g \circ f)(x,y) = \left(\dfrac{3x+6y+2x-6x}{5}, \dfrac{x-x+2y+3y}{5}\right) = \left(\dfrac{5x}{5}, \dfrac{5y}{5}\right) = (x,y)$

De même pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (on peut prendre (x,y) indifféremment), on calcule :

$(f \circ g)(a,b) = f(g(a,b)) = f\left(\dfrac{3a-2b}{5}, \dfrac{a+b}{5}\right)$

donc $(f \circ g)(a,b) = \left(\dfrac{3a-2b}{5} + 2 \times \dfrac{a+b}{5}, -\dfrac{3a-2b}{5} + 3 \times \dfrac{a+b}{5}\right)$ en remplaçant x par $\dfrac{3a-2b}{5}$ et y par $\dfrac{a+b}{5}$ dans l'expression de $f(x,y)$

donc $(f \circ g)(a,b) = \left(\dfrac{3a-2b+2a+2b}{5}, \dfrac{-3a+2b+3a+3b}{5}\right) = \left(\dfrac{5a}{5}, \dfrac{5b}{5}\right) = (a,b)$

Comme attendu, on a montré que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (g \circ f)(x,y) = (x,y)$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (f \circ g)(a,b) = (a,b)$, autrement dit $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (il s'agit de l'application qui à un élément de $\mathbb{R}^2$ associe lui-même).
donc par propriété f est bijective et sa bijection réciproque est g.