

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- utiliser les **définitions et notations de base** : matrice, matrice ligne, matrice colonne, inverse, matrices symétriques, triangulaires ou diagonales, A^n , I_n , tA , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ☐
- **calculer** le résultat d'**opérations sur les matrices** : addition, multiplication par un réel, multiplication de matrices, puissances. ☐
- **définir la transposée** de matrices et **utiliser les propriétés de calcul** ☐
- **utiliser** et dans certains cas **déterminer, l'inverse d'une matrice** ☐

1 Définitions

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

une **matrice** à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres réels, possédant n lignes et p colonnes. Une telle matrice est dite **de taille** (n, p) (on dit aussi matrice $n \times p$)

une matrice A de taille (n, p) se note donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_{i,j}$ est un réel, placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice. Les réels $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** de la matrice A

On peut noter la matrice A de façon plus synthétique :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Définitions et notations :

- une matrice qui a autant de lignes que de colonnes s'appelle une matrice **carrée**. Une matrice qui a n lignes et n colonnes est dite carrée **de taille** n
- une matrice qui n'a qu'une seule colonne est appelée **matrice-colonne**
- une matrice qui n'a qu'une seule ligne est appelée **matrice-ligne**
- on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille (n, p)
- l'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemples :

1. Pour dire que A est une matrice de taille (n, p) , on écrira donc : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $(1 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \quad 7) \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$, $(1 \quad 14 \quad -5) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

3. Ecrire les matrices $A = (i + j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $B = ((-1)^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : deux matrices sont égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes, et les mêmes coefficients, aux mêmes places. Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ ayant même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p , on a :

$$A = B \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition

Définition : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $A + B = (c_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque : on ne peut pas additionner deux matrices qui n'ont pas la même taille.

Propriétés : pour A, B, C éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

- 1) $A + B = B + A$ on dit que l'addition est **commutative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ on dit que l'addition est **associative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- 3) on note $0_{n,p}$ et on appelle **matrice nulle**, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à zéro. Alors $A + 0_{n,p} = A$

Remarques :

- ▷ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, si on note $-A$ la matrice $(-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors $A + (-A) = 0_{n,p}$
- ▷ lorsqu'on additionne trois matrices A, B , et C , on peut écrire $A + B + C$ sans parenthèses (l'ordre n'a pas d'importance) ;
- ▷ $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$. La matrice nulle joue le même rôle que 0 pour l'addition des réels, ou que 1 pour la multiplication des réels. On parle d'**élément neutre**.

2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition : pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ

autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemples :

1. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $0A = 0_{n,p}$ et $1A = A$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$, $(-1)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$, $0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,2}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$3(A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 18 & 12 \\ 6 & -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad 3B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 3A + 3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 18 & 12 \\ 3 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et α, β des réels, alors :

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Remarque : ces règles nous permettent des calculs matriciels analogues à ceux avec les nombres, par exemple :

- pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A - 4B$ désigne $A + (-4)B$
- la relation $M = -2A$ équivaut à $A = -\frac{1}{2}M$ car $-\frac{1}{2}M = -\frac{1}{2}(-2A) = \left(-\frac{1}{2} \times (-2)\right) A = A$
- soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
pour calculer $-2A - 3B$, on peut calculer $(-2)A + (-3)B$, ou bien $M = 2A + 3B$, puis $-M$

2.3 Produit matriciel

2.3.1 Produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne

Définition :

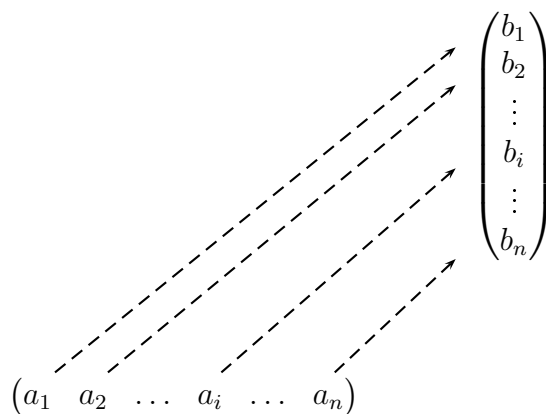
soit $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

(i.e. $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

alors, le **produit** LC est le réel

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i$$

soit $LC = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_i b_i + \dots + a_n b_n$



Exemple :

calculer le produit LC avec

$$L = (1 \ 0 \ -3 \ 1 \ 2) \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$LC = 1 \times (-1) + 0 \times 12 + (-3) \times (-1) + 1 \times 4 + 2 \times (-3) = 2$$

$$\text{et } CL = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 12 & 0 & -36 & 12 & 24 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -12 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 9 & -3 & -6 \end{pmatrix} \text{ (cf. ci-dessous)}$$

2.3.2 Produit de deux matrices

Comme l'illustre le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne, on peut définir le produit $A \times B$ (noté AB) d'une matrice A par une matrice B dès que l'on peut multiplier les lignes de A par les colonnes de B , i.e. si **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, on définit donc AB par la matrice $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_{i,j} = L_i(A)C_j(B)$$

où $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A , et $C_j(B)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

Définition : en notant $A = (a_{i,r})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq r \leq m}}$ et $B = (b_{s,j})_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$.

pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $c_{i,j}$ est donc défini par la formule du produit matriciel :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

Illustration du produit

$B : m \text{ lignes et } p \text{ colonnes}$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,j} & \dots & b_{m,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k} & \dots & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

$A : n \text{ lignes et } m \text{ colonnes}$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,j} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,j} & \dots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \dots & c_{i,j} & \dots & c_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,j} & \dots & c_{n,p} \end{pmatrix}$$

$C = A \times B : n \text{ lignes et } p \text{ colonnes}$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix}$

alors $AB = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ a-d & c-e \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} a & b & a-b \\ a & c & a-c \\ d & e & d-e \end{pmatrix}$

Remarque : lorsqu'il est possible de calculer AB , le produit BA n'est pas forcément défini.

⚠ Lorsque les produits AB et BA sont définis (A et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$), en général, $AB \neq BA$

Propriétés : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, alors

$$(AB)C = A(BC) \quad A(B+C) = AB + AC \quad (A+B)C = AC + BC$$

de plus avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer AB , $2(AB)$ puis $2A$ et $(2A)B$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, 2(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, (2A)B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve $2(AB) = (2A)B$ (on pourrait aussi vérifier $= A(2B)$)

b. Calculer $B+C$, et $A(B+C)$, puis AC et $AB+AC$

$$T = B+C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, AT = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, AB+AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve comme prévu $A(B+C) = AB+AC$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer ABC de deux manières différentes.

On trouve $A(BC) = (AB)C$
qu'on écrit ABC

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Définition : on appelle **matrice identité d'ordre n** , et on note I_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :

$$AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A$$

$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

Exemples : soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AI_2

2. Calculer $I_3 A$

3. Calculer BI_4

4. Calculer AB avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\triangle$ $AB = (0)$ (matrice nulle) n'implique pas $A = (0)$ ou $B = (0)$

2.4 Transposition

Définition : soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **matrice transposée** de A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, obtenue en « transposant » chaque ligne de la matrice A , elle est notée ${}^t A$.
Plus précisément, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A = (b_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq n}}$ avec :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_{k,l} = a_{l,k}$$

Remarque : la $i^{\text{ème}}$ ligne de A devient donc la $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^t A$

Exemples :

1. Soit $L = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$2. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } {}^t A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^t L = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Propriétés : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t({}^t A) = A \quad {}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$

pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

Remarque : attention donc ${}^t(AB) \neq {}^t A {}^t B$. Le produit ${}^t A {}^t B$ n'est d'ailleurs pas forcément défini.

Exemples :

$$1. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ alors } AB = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t(AB) = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Calculer AB , puis écrire ${}^t(AB)$ et d'autre part ${}^t A, {}^t B$, puis ${}^t B {}^t A$: on trouve ${}^t B {}^t A = {}^t(AB)$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$,

alors ${}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $X^tY = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i y_1 & x_i y_2 & \dots & x_i y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$

3 Matrices carrées

3.1 Opérations sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme $A + B$ est aussi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les produits AB et BA sont définis et sont eux-mêmes éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus ${}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ également et on rappelle que $AI_n = I_n A = A$

Définition : soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients $a_{i,i}$ de A (pour $1 \leq i \leq n$) sont appelés les **coefficients diagonaux** de A

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- par convention $A^0 = I_n$
- pour $p \in \mathbb{N}^*$, la **puissance** $p^{\text{ème}}$ de A est la matrice notée A^p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_p \text{ fois}$$

Propriétés : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, alors :

$$A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q} \quad \text{et} \quad (A^p)^q = (A^q)^p = A^{pq}$$

Remarques :

▷ On peut avoir $A^p = 0_{n,n}$ avec $A \neq 0_{n,n}$

Par exemple, calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3} \text{ et donc } \forall p \geq 3, A^p = 0_{3,3}$$

▷ En général, $(AB)^p \neq A^p B^p$. Cela sera vrai lorsque A et B commutent, c'est-à-dire pour $AB = BA$. De la même façon, l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (comme les autres) est fausse. De même pour le binôme de Newton.

Exemples : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^2 , A^3 , puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis par récurrence : pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } P(n) : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = I_2$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vérifiée

alors $A^{n+1} = A \times A^n$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par hypothèse de récurrence, puis le calcul donne

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

3.2 Matrices triangulaires

Définition : soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que T est

1. triangulaire supérieure lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$,

$$\text{i.e. } T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. triangulaire inférieure lorsque pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}n^2$, $t_{i,j} = 0$ dès que $i < j$,

$$\text{i.e. } T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1,n-1} & 0 \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut résumer cela par « les coefficients **au-dessous de** la diagonale sont nuls » (triangulaire supérieure) et « les coefficients **au-dessus de** la diagonale sont nuls » (triangulaire inférieure)

Exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est **triangulaire supérieure**.

2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est **triangulaire inférieure**.

Propriétés : soit A, B des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

λA , $A + B$, AB sont triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures).

3.3 Matrices diagonales

Définition : une matrice $D = (d_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonale** lorsque tous ses coefficients sont nuls sauf éventuellement ses coefficients diagonaux, autrement dit lorsque : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $d_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$

Notation :

soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels, en écrivant usuellement la matrice, on obtient la forme ci-contre, ce que l'on note parfois

$$D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice I_n est diagonale, ses coefficients diagonaux sont **tous égaux à 1**

Exemples : calculer AB avec

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ on trouve $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 \end{pmatrix}$

Propriétés : soit $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = \text{Diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors λA , $A + B$, AB et A^k sont diagonales et de plus

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda a_n \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1} + b_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1} b_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix} \quad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

on peut le résumer en écrivant :

$$\lambda A = \text{Diag}(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad \text{et} \quad A + B = \text{Diag}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$AB = \text{Diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \quad \text{et} \quad A^k = \text{Diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3.4 Matrices symétriques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t A$ est également une matrice carrée de taille n

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est dite **symétrique** lorsque ${}^t A = A$

Propriétés : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple :

1. Montrer que la somme de deux matrices symétriques est symétrique.

$${}^t A + B = {}^t A + {}^t B = A + B \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont symétriques.}$$

2. Le produit de deux matrices symétriques est-il toujours une matrice symétrique ?

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ on trouve } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.5 Matrices inversibles

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

la matrice A est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$

$\triangle$ on ne peut inverser que des matrices carrées.

Propriétés et définition : soit A une matrice inversible de taille n , alors

1. la matrice B est unique.
2. on a en fait $AB = BA = I_n$
3. la matrice B s'appelle la **matrice inverse** de A , on la note A^{-1}

Exemples :

1. I_n est **inversible**, d'inverse I_n
2. On a vu que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), 0_{n,n} A = A 0_{n,n} = 0_{n,n}$ donc la matrice nulle $0_{n,n}$ **n'est pas inversible**.

Propriétés : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi, et $(A^{-1})^{-1} = A$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A est inversible ssi il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = I_2$

$$\text{i.e. ssi il existe } a, b, c, d \text{ réels tels que } \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $a = 1, b = -1, c = -1, d = 2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A est inversible ssi il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = I_2$

$$\text{i.e. ssi il existe } a, b, c, d \text{ réels tels que } \begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ 2b + 2d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

ce qui implique $b + d = 0 = 1$ ce qui est faux donc A n'est pas inversible

Propriété - matrice diagonale inversible

une matrice D diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls ; autrement dit, $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est inversible si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d_i \neq 0$$

de plus si $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est inversible, alors $D^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

1. soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors :

- si $AB = AC$, alors $B = C$; on dit que A est **simplifiable à gauche**
- si $BA = CA$, alors $B = C$; on dit que A est **simplifiable à droite**

2. soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration :

1. En effet, en supposant $AB = AC$, on peut effectuer le produit par A^{-1} à gauche alors $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ i.e. $I_n B = I_n C$, soit $B = C$
on procède de même pour la simplification à droite.

2. En supposant A et B inversibles et en notant $M = B^{-1}A^{-1}$, alors
 $M(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$

Propriétés - inverse de la transposée :

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors ${}^t A$ est inversible et

$$({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$$

Démonstration : il suffit de transposer $AA^{-1} = I_n$ pour s'en convaincre.

${}^t(AA^{-1}) = {}^t I_n = I_n$ or ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^t A$ donc ${}^t(A^{-1}){}^t A = I_n$ d'où le résultat

Définition et Propriétés - caractérisation d'une matrice 2×2 inversible

soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **déterminant de A** le nombre réel $ad - bc$, noté $\det A$

1. A est inversible si et seulement si : $\det A \neq 0$ (i.e. $ad - bc \neq 0$)

2. si A est inversible (i.e. $\det A \neq 0$), alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration :

soit $M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, alors $AM = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$

1. si $ad - bc \neq 0$, si on note $B = \frac{1}{ad - bc}M$, on a $AB = I_2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = B$

2. supposons $ad - bc = 0$, on a donc $AM = 0I_2 = 0_{2,2}$

On va procéder par l'absurde : supposons que A est inversible, alors en multipliant à gauche la relation par A^{-1} , on obtient $M = 0_{2,2}$, ce qui donne $a = b = c = d = 0$, puis $A = 0_{2,2}$, c'est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle A est inversible.

Donc notre hypothèse « A est inversible » est fausse.

Finalement, si $ad - bc = 0$ alors A n'est pas inversible, ce qui, par contraposition, donne : si A est inversible, alors $ad - bc \neq 0$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

$\det A = (-4) \times 3 - (-2) \times 5 = -2$ donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Un problème classique

Cf. exercices **15** et **21**, on s'intéresse à plusieurs suites définies de manière récursive et « croisée »,

par exemple $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Questions - type	Méthode
Déterminer A tel que $X_{n+1} = AX_n$	on fait (au brouillon) le produit $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (+ w_n \dots)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$	démonstration par récurrence type « formule explicite d'une suite géométrique »
Déterminer P^{-1}	1) si $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on utilise la propriété plus haut 2) on utilise une relation par exemple entre A^2, A et I_n 3) on utilise un système (cf. chapitre sur les systèmes)
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$	par récurrence en utilisant : $PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_nDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Calculer D^n pour tout entier n	propriété sur les matrices diagonale
En déduire A^n pour tout entier n	par le calcul : produit matriciel PD^nP^{-1}
En déduire u_n et v_n pour tout entier n	par le calcul : produit matriciel $A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$