## Plan de travail

| **Notion** | **Exercices a minima** | **Mais aussi** |
|---|---|---|
| Ecriture et calculs matriciels | 1 à 7, 9 | 8 |
| Inversibilité d'une matrice | 12, 13 | 14 |
| Exercices ou problèmes type | 15, 16, 21 | 20 |
| Exercices plus abstraits | 17, 18 | 10, 11, 19 |

## Calcul matriciel

### Exercice 1

1. Ecrire la matrice $A = (ij)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 5\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$
2. Ecrire la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$, avec $b_{i,j} = \min(i,j)$ (le minimum entre $i$ et $j$).

### Exercice 2

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Calculer $A+B, 2A-B, AB, BA, {}^{\mathrm{t}}(AB)$ et ${}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ (vérifier l'égalité).

### Exercice 3

Calculer les produits $LC$ et $CL$ où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Exercice 4

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A+B$, $A-B$, $A^2-B^2$, $(A+B)(A-B)$. Que constate-t-on ?
2. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que constate-t-on ?

### Exercice 5

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$. Soient $A, B, C$ trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Développer les expressions matricielles suivantes :

1. $A(B+C) =$
2. $(B+C)A =$
3. $(A+B)^2 =$
4. $(A+B)^3 =$
5. $A(A^2+2A+B+I_n) =$

### Exercice 6

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$. Soient $A, M$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Factoriser les expressions matricielles suivantes :

1. $M^2+3M+MA =$
2. $AM-2M =$
3. $M^3+3M^2-2M =$
4. $M^2-2M =$

### Exercice 7

Soit $a, b$ et $c$ des réels,

on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

### Exercice 8

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $a$ un réel et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1+\dfrac{a^2}{2} & \dfrac{a^2}{2} \\ -a & -\dfrac{a^2}{2} & 1-\dfrac{a^2}{2} \end{pmatrix}$

1. Calculer $U^2$
2. Exprimer $M$ à l'aide des matrices $I_3$, $U$ et $U^2$

### Exercice 9

Soit $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2$ et $A^3$
2. Donner, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'expression de $A^p$ en fonction de $p$
3. Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$
   Soit $J = (a_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{k,l} = 1$ pour tous $k$ et $l$ éléments de $[\![1, n]\!]$
   a. Montrer que $J^2 = nJ$
   b. Exprimer $J^p$ à l'aide de $J$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

### Exercice 10

Soit $\varphi$ l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = A + {}^{\mathrm{t}}A$$

1. Montrer que pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A)$ est symétrique.
2. Montrer que pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\varphi(M+N) = \varphi(M) + \varphi(N), \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda\, M) = \lambda\, \varphi(M)$$
3. Montrer que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi$

### Exercice 11

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$
On note $E$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant : $AM = BM$

1. On suppose que $M_1 \in E$ et que $M_2 \in E$. Montrer que $M_1 + M_2 \in E$
2. On suppose que $N \in E$, et que $\lambda$ est un nombre réel. Vérifier que $\lambda N \in E$

## Matrices inversibles

### Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$ et $A^3$
2. $A$ est-elle inversible ?
3. Déterminer $A^n$ pour $n$ un entier tel que $n \geqslant 3$.

### Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer $A^2$ puis $A^3$
2. En déduire que $A$ n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$
   En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

### Exercice 14

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$
Soit $P$ une matrice carrée de taille $n$ telle que $P^2 = P$
Soit $Q$ la matrice : $Q = I_n - P$

1. Montrer que si $P$ est inversible, alors $P = I_n$
2. Montrer que si $P - I_n$ est inversible, alors $P$ est la matrice nulle.
3. Montrer que $Q^2 = Q$
4. Montrer que $PQ + QP = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

## Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Exprimer $A^2$ à l'aide de $A$ et de $I_3$
2. En déduire que $A$ est inversible, et déterminer $A^{-1}$
3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de manière unique, telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I_3$
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2
5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $a_n$ en fonction de $n$, puis celle de $b_n$
6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $A^n$ en fonction de $n$

## Exercice 16

Soit $A$ et $P$ les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice $P$ est inversible, et calculer $P^{-1}$
2. On note $D$ la matrice : $D = P^{-1}AP$
   - **a.** Calculer $D$
   - **b.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$
   - **c.** Calculer $D^n$ pour tout entier $n$
   - **d.** En déduire $A^n$ pour tout entier $n$
3. Soient $u$ et $v$ les suites réelles définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
   - **a.** Déterminer $X_0$
   - **b.** Pour $n$ entier, donner une relation entre $X_{n+1}$ et $X_n$
   - **c.** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$
   - **d.** Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$

## Exercice 17

Soit $E$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in E$
   - **a.** Montrer que $A = aM_1 + bM_2$, où $M_1$ et $M_2$ sont des matrices de $E$ à déterminer.
   - **b.** Montrer que : $A = 0_{2,2} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
   - **c.** Donner une condition nécessaire sur les réels $a$ et $b$ pour que $A$ soit inversible.
2. Montrer que si $M \in E$ et $N \in E$, alors $M + N \in E$
3. Montrer que si $M \in E$ et $N \in E$, alors $MN \in E$

## Exercice 18

Soit $A$ une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer toutes les matrices $B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^{-1}BA = 0_{n,n}$

## Exercices plus difficiles

### Exercice 19

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $J$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On note $s$ la somme de tous les coefficients de la matrice $A$.
A l'aide de la formule du produit matriciel, montrer que :

$$JAJ = sJ$$

### Exercice 20

Soit $P$ le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^2 - 3x + 2$

et $A$ la matrice carrée de taille 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- lorsque $T$ est un polynôme défini par :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$,
  $T(A)$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ : $a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$
- lorsque $T$ et $V$ sont des polynômes, et $R = T + V$,
  alors $R(A) = T(A) + V(A)$
- lorsque $T$ et $V$ sont des polynômes, et $R = TV$,
  alors $R(A) = T(A)V(A)$

1. Déterminer les racines de $P$
2. Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$. On admet qu'il existe $Q$ un polynôme, et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q(x) + R(x)$$
   Grâce à la question précédente, déterminer les coefficients du polynôme $R$
3. Vérifier que $P(A) = 0_{3,3}$
4. Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$. Grâce à la question 2, montrer que
   $$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 3 \times 2^n - 2 & 3(1 - 2^n) \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

### Exercice 21 - Problème-type

*Cet exercice est un extrait d'un D.S. d'année antérieure.*

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. **a.** Déterminer une matrice carrée $A$ de taille 2 telle que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   **b.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On note $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

   **a.** Justifier que $Q$ est inversible puis déterminer $Q^{-1}$

   **b.** Déterminer la matrice $D$ telle que $D = Q^{-1}AQ$

   **c.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $A^n = QD^nQ^{-1}$

   **d.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
   $$A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

   **e.** Déterminer les valeurs de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$

   **f.** Etudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

*Ce schéma-type peut être complété par une partie en probabilités (cf. D.S. de fin d'année) et par de nouvelles questions en deuxième année (par exemple, vous pourrez trouver les matrices Q et/ou D vous-mêmes).*