

Corrigés, entre autres, des exercices (ou partie) non abordés en classe

Exercice 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Donner, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'expression de A^p en fonction de p
3. Soit n un entier tel que $n \geq 2$

Soit $J = (a_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{k,l} = 1$ pour tous k et l éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$

- a. Montrer que $J^2 = nJ$

De même que nous avons vu à la question 1. que $A^2 = 3A$ et que $\forall p \in \mathbb{N}, A^p = 3^{p-1}A$, on montre dans le cas général d'une matrice de taille n $J^2 = nJ$ et que $J^p = n^{p-1}J$

Pour montrer rigoureusement, que $J^2 = nJ$, on peut utiliser la définition pour calculer le produit J^2

en appelant $c_{i,j}$ le coefficient d'indice i, j de la matrice J^2 , par définition du produit (de J avec J) :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n 1 \times 1 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

(car tous les coefficients de J valent 1)

$$\text{donc } J^2 = (n)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = n(1)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = nJ$$

- b. Exprimer J^p à l'aide de J pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

On procède par récurrence de manière analogue à la question 2., pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(p) : J^p = n^{p-1}J$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow J^1 = n^{1-1}J \Leftrightarrow J = n^0J \Leftrightarrow J = J$ ce qui est vrai donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(p)$ est vraie

alors par hypothèse $J^p = n^{p-1}J$ donc $J^p J = n^{p-1}J J$

i.e. $J^{p+1} = n^{p-1}J^2$

or $J^2 = nJ$ d'après 3.a. donc $J^{p+1} = n^{p-1}nJ$

donc $J^{p+1} = n^p J$ i.e. $P(p+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*, P(p)$ est vraie, i.e. $J^p = n^{p-1}J$

Exercice 11

Exercice un peu abstrait, mais qui montre que certaines propriétés se transmettent « facilement », c'est-à-dire qu'elles sont linéaires.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant : $AM = BM$

1. On suppose que $M_1 \in E$ et que $M_2 \in E$. Montrer que $M_1 + M_2 \in E$

Soit $(M_1, M_2) \in E^2$,

alors par définition $AM_1 = BM_1$ et $AM_2 = BM_2$

donc $AM_1 + AM_2 = BM_1 + BM_2$ donc $A(M_1 + M_2) = B(M_1 + M_2)$

i.e. $M_1 + M_2 \in E$

2. On suppose que $N \in E$, et que λ est un nombre réel. Vérifier que $\lambda N \in E$

Soit $N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
 alors par définition $AN = BN$ et donc $\lambda AN = \lambda BN$
 ce que l'on peut écrire $A(\lambda N) = B(\lambda N)$ ce qui signifie, $\lambda N \in E$

Exercice 15

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A^2 à l'aide de A et de I_3
2. En déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}
3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies de manière unique, telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3$
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n , puis celle de b_n .

On met en place la méthode pour expliciter les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+2} + 2a_n$, on étudie donc l'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$ qui admet pour racines évidentes -1 et 2

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$

en particulier $a_0 = \lambda + \mu$ et $a_1 = -\lambda + 2\mu$

or $a_0 = 0$ car $A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3$ et $a_1 = 1$ car $A = 1 \times A + 0 \times I_3$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 3\mu = 1 \text{ par substitution} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)$$

$$\text{de plus } \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2a_n \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2a_{n-1} = 2 \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n-1}) = \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)$$

or $b_0 = 1$ car $A^0 = 0 \times A + 1 \times I_3$, donc la formule est aussi valable pour $n = 0$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2 \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n-1}) = \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)$$

6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n .

D'après les questions 3. et 5., on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)A + \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)I_3 \text{ et donc}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Exercices plus difficiles

Exercice 19

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1

On note s la somme de tous les coefficients de la matrice A

A l'aide de la formule du produit matriciel, montrer que : $JAJ = sJ$

On est obligé de formaliser la question avec la formule du produit.

On peut le faire en posant $B = AJ$ avec $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

alors par définition $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times 1$ (car tous les coefficients de la matrice J valent 1)

$$\text{donc } b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}$$

Et en notant $C = JAJ = JB$ avec $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

alors de même $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{l=1}^n 1 \times b_{l,j} = \sum_{l=1}^n b_{l,j}$

or $b_{l,j} = \sum_{k=1}^n a_{l,k}$ donc $c_{i,j} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,k}$, i.e. $c_{i,j} = s$ et ce quel que soit le coefficient.

Exercice 20

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - 3x + 2$ et A la matrice carrée de taille 3

$$\text{suivante : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• lorsque T est un polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$T(A)$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n$

• lorsque T et V sont des polynômes, et $R = T + V$, alors

$$R(A) = T(A) + V(A)$$

• lorsque T et V sont des polynômes, et $R = TV$, alors

$$R(A) = T(A)V(A)$$

1. Déterminer les racines de P

P admet 1 et 2 comme racines évidentes.

2. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On admet qu'il existe Q un polynôme, et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = P(x)Q(x) + R(x)$$

Grâce à la question précédente, déterminer les coefficients du polynôme R

Sachant que d'une part $R \in \mathbb{R}_1[X]$, i.e. $R(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et que d'autre part $P(1) = P(2) = 0$

alors en utilisant l'expression donnée :

$$1^n = P(1)Q(1) + R(1) \text{ i.e. } 1 = R(1) = a + b$$

$$\text{et de même } 2^n = P(2)Q(2) + R(2) \text{ i.e. } 2^n = R(2) = 2a + b$$

$$\text{donc } a = 2^n - 1 \text{ et } b = 2 - 2^n \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, R(x) = (2^n - 1)x + 2 - 2^n$$

3. Vérifier que $P(A) = 0_{3,3}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } P(A) = A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2+0+2 & 3-3+0 & -3+3+0 \\ -9+9+0 & 10-12+2 & -9+9+0 \\ -3+3+0 & 3-3+0 & -2+0+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } P(A) = 0_{3,3}$$

4. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Grâce à la question 2, montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 3 \times 2^n - 2 & 3(1 - 2^n) \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

Les deux polynômes x^n et $P(x)Q(x) + R(x)$ étant égaux, les polynômes de matrices associés sont égaux aussi : i.e. $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$

or $P(A) = 0_{3,3}$ donc $A^n = R(A) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$

$$= \begin{pmatrix} (2 - 2^n) & (2^n - 1) & -(2^n - 1) \\ -3(2^n - 1) & 4(2^n - 1) + (2 - 2^n) & -3(2^n - 1) \\ -(2^n - 1) & (2^n - 1) & (2 - 2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 3 \times 2^n - 2 & -3(1 - 2^n) \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 21 - Problème-type

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. a. Déterminer une matrice carrée A de taille 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on obtient alors } A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Démonstration classique par récurrence, la suite de matrices est analogue à une suite géométrique.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on définit l'assertion } P(n) : \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation : $A^0 = I_2$ donc $A^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ soit vraie

$$\text{d'après 3.a. } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et par hypothèse de récurrence } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } P(n+1) \text{ est vérifiée, d'où l'hérédité}$$

$$\text{donc par théorème de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie, i.e. } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. On note $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- a. Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}

On utilise le critère d'inversibilité pour les matrices de taille 2, ici : $1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4$

$$\text{donc } Q \text{ est inversible et de plus } Q^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- b. Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$

Il suffit de calculer, on pressent que D est une matrice diagonale :

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est bien le cas, $D = \text{diag}(1, -3)$

- c. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = QD^nQ^{-1}$

Commençons par inverser la formule précédente : $D = Q^{-1}AQ \Rightarrow QD = AQ \Rightarrow QDQ^{-1} = A$ puis on procède par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : A^n = QD^nQ^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = QD^0Q^{-1} \Leftrightarrow I_2 = QI_2Q^{-1}$

ce qui est le cas car $QI_2Q^{-1} = QQ^{-1} = I_2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie

donc par hypothèse $A^n = QD^nQ^{-1}$

donc $A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^nI_2DQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$

donc $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, i.e. $A^n = QD^nQ^{-1}$

d. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

Par propriété sur les matrices diagonales : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

de fait, d'après **1.c.**,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ (-3) \times (-3)^n & (-3)^n \end{pmatrix}$$

donc $A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$ d'où le résultat

e. Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

de fait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)$ et $v_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$

f. Etudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Par propriété sur les suites géométriques $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (forme q^n avec $q \leq -1$) donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.