Code de partage avec Capytale : 2a23-1343294

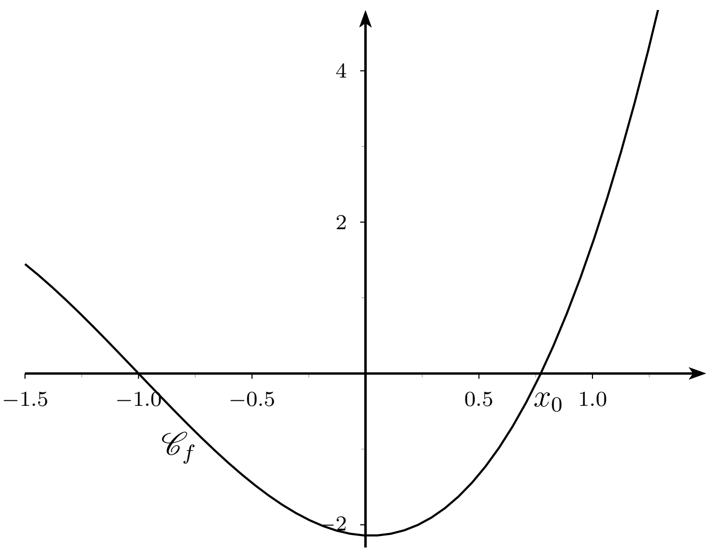
L'objectif de cette séance est de construire un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction par la méthode de dichotomie (on appelle **zéro d'une fonction** f une solution de l'équation $f(x) = 0$). La dichotomie, qui provient du grec « division en deux parties », sera itérée plusieurs fois, jusqu'à obtenir le niveau de précision souhaitée.

1 Principe

Expliquons le principe de dichotomie sur l'exemple ci-dessous (voir graphique).

- on voit que f est continue (et strictement croissante) sur l'intervalle $[0, 1]$, et de plus que $f(0) < 0$ et que $f(1) > 0$
  de fait, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $\exists x_0 \in]0, 1[, f(x_0) = 0$
- on calcule l'image du centre de l'intervalle $[0, 1]$, qui est $m_1 = \dfrac{1}{2}$
  on trouve $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$, donc forcément, $x_0 > \dfrac{1}{2}$
  donc on poursuit la recherche de x_0 dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$
- on coupe l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ en 2 avec $m_2 = \dfrac{3}{4}$
  or $f\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$, donc $x_0 > \dfrac{3}{4}$
  ▷ on poursuit donc la recherche de x_0 dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$
- on coupe l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$ en 2 avec $m_3 = \dfrac{7}{8}$
  or $f\left(\dfrac{7}{8}\right) > 0$, donc $x_0 < \dfrac{7}{8}$
  ▷ on poursuit donc la recherche de x_0 dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{8}\right]$

A ce stade, on sait que $\dfrac{3}{4} < x_0 < \dfrac{7}{8}$, soit : $0,75 < x_0 < 0,875$. L'amplitude de ce dernier intervalle est $0,875 - 0,75 = 0,125$. Si cette amplitude et plus grande que la précision choisie (c'est le cas par exemple si on souhaite avoir une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près, dans ce cas la précision choisie est de 10^{-1}), il faut continuer le procédé.
On le répète donc **tant que** l'amplitude de l'intervalle est supérieure à la précision choisie.



Dans cet exemple, si on appelle $[a, b]$ l'intervalle qui contiendra x_0 à chaque étape du procédé :

- au départ $[a, b] = [0; 1]$
- après l'étape 1, $[a, b] = [0,5; 1]$
- après l'étape 2, $[a, b] = [0,75; 1]$
- après l'étape 3, $[a, b] = [0,75; 0,875]$

Exercice 1 - procédé de dichotomie sur un exemple

On pose $f(x) = \ln(x) + \dfrac{x}{2} - 1$ pour $x > 0$

1. Justifier que f s'annule sur l'intervalle $[1, 2]$ en un réel qu'on notera x_0
2. Utiliser Python pour définir la fonction puis calculer $f(m)$ et faire *pas à pas* l'algorithme avec pour valeurs de départ $a = 1$ et $b = 2$, pour remplir le tableau suivant donnant les valeurs de a, b, m ainsi que le signe de $f(m)$:

Etape	a	b	m	$f(m)$
0	1	2	1.5	$+$
1				
2				
3				
4				

3. Calculer l'amplitude de l'intervalle $[a, b]$ à chaque étape.
4. Combien d'étapes faudrait-il pour avoir une valeur approchée de x_0 à $0,1$ près ? à 10^{-3} près ? à 10^{-8} près ?
5. Ecrire un algorithme qui permet de calculer la valeur de x_0 à 10^{-3} près.