

## Corrigé - sujet A

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  et  $a \in \mathcal{D}_f$   
Donner la définition de la continuité de  $f$  en  $a$

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$  ?

D'après le cours (si  $n > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  si  $n$  est impair et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  si  $n$  est pair.

3. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$  ?

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  par croissance comparée.

4. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}}{x^3}$  ?

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1+x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$  donc par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}}{x^3} = -\infty$

5. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x-2}{5x^2+12}$  ?

$\frac{6x-2}{5x^2+12} = \frac{6x(1-\frac{2}{6x})}{5x^2(1+\frac{12}{5x^2})} = \frac{6}{5x} \times \frac{1-\frac{2}{6x}}{1+\frac{12}{5x^2}}$  or d'après les limites de référence,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{5x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{6x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{6x} = 0$  donc par opérations  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x-2}{5x^2+12} = 0$

6. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-7x+5}$  ?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x+5 = +\infty$  par opérations, or  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  donc par composition  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-7x+5} = +\infty$

7. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-9}{x-3}$  ?

Pour lever la forme indéterminée, on peut procéder comme à la question 5., ou remarquer :

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+3 = -\infty$$

8. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 3 \\ x^2-4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- a. Montrer que  $f$  est continue en 3

D'après la définition de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3+2 = 5 = f(3)$  donc  $f$  est continue à gauche en 3 et

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2-4 = 5 = f(3)$  donc  $f$  est continue à droite en 3, donc  $f$  étant continue à droite et à gauche en 3, elle est continue en 3

- b. Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$f$  est continue sur  $] -\infty, 3]$  et sur  $]3, +\infty[$  car elle définit par des expressions polynomiales sur ces deux intervalles, de plus  $f$  est continue en 3 d'après la question précédente, donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

9. Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$

Avec Python, écrire programme qui définit la fonction  $f$  et qui calcule les valeurs de  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(100)$

```
def f(x):
    return (x**3-1)/(x
            **3+1)

for i in range (0,101) :
    print f(i)
```

## Corrigé - sujet B

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  et  $a \in \mathcal{D}_f$   
Donner la définition de la continuité de  $f$  en  $a$

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$  ?

D'après le cours (si  $n > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  si  $n$  est impair et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  si  $n$  est pair.

3. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$  ?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  par croissance comparée.

4. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x}$  ?

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$  donc par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x} = -\infty$

5. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 8}{7x + 1}$  ?

$\frac{3x^2 + 8}{7x + 1} = \frac{3x^2 \left(1 + \frac{8}{3x^2}\right)}{7x \left(1 + \frac{1}{7x}\right)} = \frac{3x}{7} \times \frac{1 + \frac{8}{3x^2}}{1 + \frac{1}{7x}}$  or d'après les limites de référence,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{7} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{3x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{7x} = 0$  donc par opérations  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 8}{7x + 1} = -\infty$

6. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-9x+1}$  ?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -9x + 1 = +\infty$  par opérations, or  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  donc par composition  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-9x+1} = +\infty$

7. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  ?

Pour lever la forme indéterminée, on peut procéder comme à la question 5., ou remarquer :

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$$

8. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a. Montrer que  $f$  est continue en 2

D'après la définition de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} = 4 + 1 = 5 = f(2)$  donc  $f$  est continue à gauche en 2 et

$\lim_{x \rightarrow 2^+} = 2 \times 2^2 - 3 = 5 = f(2)$  donc  $f$  est continue à droite en 2, donc  $f$  étant continue à droite et à gauche en 2, elle est continue en 2

- b. Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$f$  est continue sur  $] -\infty, 2]$  et sur  $]2, +\infty[$  car elle est définie par des expressions polynomiales sur ces deux intervalles, de plus  $f$  est continue en 2 d'après la question précédente, donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

9. Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$

Avec Python, écrire programme qui définit la fonction  $f$  et qui calcule les valeurs de  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(100)$

```
def f(x):
    return (x**4+1)/(x
    **4-1)
for i in range (0,101) :
    print f(i)
```