

### Groupe 1 - autour de la définition des séries

En s'inspirant du tableau ci-dessous et du cas concret ci-dessous, proposer et illustrer une définition des séries numériques et de la somme partielle.

Une situation concrète :  
une suite et la somme de ses termes

Monsieur Pénible veut faire creuser un puits dans son jardin. L'entreprise qu'il a contactée lui propose le devis suivant : Le premier mètre coûte 120€ et chaque mètre supplémentaire coûte 50€ de plus que le mètre précédent. On note  $u_n$  le coût du forage du  $n^{\text{ième}}$  mètre. Voici des questions possibles :

Suite	Sommes partielles
$u_0$	$u_0$
$u_1$	$u_0 + u_1$
$u_2$	$u_0 + u_1 + u_2$
$u_3$	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3$
$\vdots$	$\vdots$
$u_n$	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

1. Combien va lui coûter un puits de 6 mètres ?
2. Il dispose d'un budget de 5000€. Quelle sera la profondeur maximale de son puits ?
3. Peut-il faire creuser un puits infini (sachant que son budget est fini) ?

### Groupe 2 - autour de la convergence

Démontrer et illustrer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$

Travaux pratiques pour une illustration concrète :

Prendre une feuille A4. On considère qu'elle représente l'unité (« elle fait un »). Puis réaliser les étapes suivantes :

1. Couper la feuille en deux parties égales, sur une des deux parties, noter  $u_1$  ;
2. Prendre la partie vierge, la couper en deux parties égales puis sur un des deux nouveaux morceaux, noter  $u_2$  ;
3. ... répéter l'opération jusqu'à  $u_5$  (ou plus si affinité).
4. Reconstituer le puzzle.

Qu'est-ce qui majore le puzzle ? Vers quoi peut tendre le puzzle ?

### Groupe 1 - autour de la définition des séries

En s'inspirant du tableau ci-dessous et du cas concret ci-dessous, proposer et illustrer une définition des séries numériques et de la somme partielle.

Une situation concrète :  
une suite et la somme de ses termes

Monsieur Pénible veut faire creuser un puits dans son jardin. L'entreprise qu'il a contactée lui propose le devis suivant : Le premier mètre coûte 120€ et chaque mètre supplémentaire coûte 50€ de plus que le mètre précédent. On note  $u_n$  le coût du forage du  $n^{\text{ième}}$  mètre. Voici des questions possibles :

Suite	Sommes partielles
$u_0$	$u_0$
$u_1$	$u_0 + u_1$
$u_2$	$u_0 + u_1 + u_2$
$u_3$	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3$
$\vdots$	$\vdots$
$u_n$	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

1. Combien va lui coûter un puits de 6 mètres ?
2. Il dispose d'un budget de 5000€. Quelle sera la profondeur maximale de son puits ?
3. Peut-il faire creuser un puits infini (sachant que son budget est fini) ?

### Groupe 2 - autour de la convergence

Démontrer et illustrer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$

Travaux pratiques pour une illustration concrète :

Prendre une feuille A4. On considère qu'elle représente l'unité (« elle fait un »). Puis réaliser les étapes suivantes :

1. Couper la feuille en deux parties égales, sur une des deux parties, noter  $u_1$  ;
2. Prendre la partie vierge, la couper en deux parties égales puis sur un des deux nouveaux morceaux, noter  $u_2$  ;
3. ... répéter l'opération jusqu'à  $u_5$  (ou plus si affinité).
4. Reconstituer le puzzle.

Qu'est-ce qui majore le puzzle ? Vers quoi peut tendre le puzzle ?

### Groupe 3 - autour de la croissance monotone

Démontrer et illustrer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

On pourra utiliser le tableau ci-contre pour illustrer. Ce tableau repose sur l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{et sur} \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Rang	Sommes partielles		Majorant au rang $n$		Majorant global
1	$\frac{1}{1^2}$	$\leq$		$\leq$	2
2	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$	$\leq$	$1 + 1 - \frac{1}{2}$	$\leq$	
3	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$	$\leq$		$\leq$	
$\vdots$	$\vdots$				
$n$	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$	$\leq$		$\leq$	

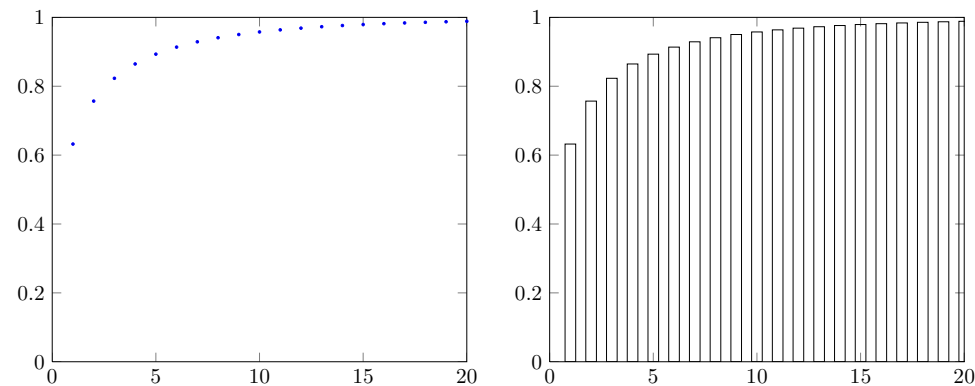
### Groupe 4 - autour d'une condition nécessaire de convergence

L'objectif ici est de montrer que :

si une série  $\sum_n u_n$  converge alors nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Nous ne l'avons pas précisé, mais cette condition se retrouve pour les suites : si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Autrement dit si  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.

On pourra utiliser les graphiques suivants pour illustrer. Et on pourra aussi utiliser une suite pour montrer que la réciproque est fausse.



### Groupe 3 - autour de la croissance monotone

Démontrer et illustrer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

On pourra utiliser le tableau ci-contre pour illustrer. Ce tableau repose sur l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{et sur} \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Rang	Sommes partielles		Majorant au rang $n$		Majorant global
1	$\frac{1}{1^2}$	$\leq$		$\leq$	2
2	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$	$\leq$	$1 + 1 - \frac{1}{2}$	$\leq$	
3	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$	$\leq$		$\leq$	
$\vdots$	$\vdots$				
$n$	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$	$\leq$		$\leq$	

### Groupe 4 - autour d'une condition nécessaire de convergence

L'objectif ici est de montrer que :

si une série  $\sum_n u_n$  converge alors nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Nous ne l'avons pas précisé, mais cette condition se retrouve pour les suites : si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Autrement dit si  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.

On pourra utiliser les graphiques suivants pour illustrer. Et on pourra aussi utiliser une suite pour montrer que la réciproque est fausse.

