

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Divergence grossière	1	
Séries télescopique	2, 3, 5	4
Séries de référence	9	8
Convergence absolue	7	
Séries à termes positifs	6, 10	

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 5}{2n^2 + 1}$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 - 2}{n^3}$
3. $\sum_{n \geq 1} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

Exercice 2

Pour n entier tel que $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n + 1)}$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$?
2. Transformer l'expression de u_n pour $n \geq 2$,
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Indication : un peu comme dans l'exercice 3.

Exercice 3

Pour n entier tel que $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$?

2. Pour $n \geq 2$, mettre $1 - \frac{1}{n}$ sous forme d'une fraction, puis transformer l'expression de u_n

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est divergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n u_k$

Indication : on devra reconnaître une série très particulière.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n , en utilisant des télescopes.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$
2. Etudier la monotonie de la suite u
3. En déduire que u converge, vers 0
4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ est convergente.
5. Déterminer la somme de cette série.

Exercice 6

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq u_n$$

Les résultats démontrés aux **1.a.** et **2.a.** restent valables pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.

1. a. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. Montrer que la

série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est elle aussi convergente.

- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ est convergente.

2. a. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente. Montrer que la

série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente, vers $+\infty$

- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

- c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n-1 + (-1)^n e^{-n}}$ est divergente.

Séries usuelles

Exercice 7

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, avec :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ 2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2}$

Exercice 8

Soit q un nombre réel tel que $|q| < 1$

1. Soit p un entier, avec $p \geq 2$
- a. Justifier que la série $\sum_{n \geq p} q^n$ est convergente.

- b. Calculer la somme de cette série.

2. a. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} nq^n$ est convergente.

- b. Calculer la somme de cette série.

3. a. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} n^2 q^n$ est convergente.

- b. Calculer la somme de cette série.

Exercice 9

Justifier que la série suivante est convergente, et calculer sa somme.

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$ | 5. $\sum_{n \geq 1} \frac{2n^2 + 3n + 5}{2^n}$ | 8. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!}$ | 6. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^{2n+1}}$ | 9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 (-1)^n}{4^n}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 0} n(-1)^n e^{-n}$ | 7. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n}$ | 10. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ |
| 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}$ | | |

Exercice 10

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, avec, pour $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq e^{-n}$
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.
- a. Déduire de **2.** que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- b. Retrouver que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, on notera S sa somme.
- c. Montrer que $S \leq \frac{e}{e-1}$