Corrigés, des exercices non abordés en classe entre autres.

Calcul de limites

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{8}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13 = +\infty$
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{9}{x\sqrt{x}} = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{3}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$
9. $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2}\right) = -\infty$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}} = 0$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-3x^2+5) = +\infty$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1} = +\infty$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1} = +\infty$
15. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{3x^2+2x+1}{x-2} = +\infty$
16. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = -\infty$
17. $\lim\limits_{x\to3} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}} = -\infty$
18. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{1}{6}$
19. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-2}} = 0$
20. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = -\infty$
21. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{x}\right) = +\infty$

16. Tel quel, il s'agit d'une forme indéterminée : « $\frac{0}{0}$ », mais le 0 au numérateur signifie que 2 en est une racine. En effet $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ et donc $\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)^2} = \frac{x-3}{2-x}$.
On conclut par opérations sur les limites avec $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(2-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-3 = -1$

18. Technique du conjugué, adaptée dans le cas d'une différence de racines (ce qui est un cas « déguisé » ici : $\sqrt{x+7}-3 = \sqrt{x+7}-\sqrt{9}$)

$$\sqrt{x+7}-3 = (\sqrt{x+7}-3)\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{x+7-9}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}$$

donc $\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{x-2}{(x-2)\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$

et donc $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-x}{e^x-1} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-x}{e^x-1} = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = +\infty$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{4}}} = 0$
7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{4}}} = -\infty$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} (6+x^2)e^x = 0$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-e^{2x}) = -\infty$

5. $\frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = \frac{e^{2x}\times e^{-1}}{(\ln(x))^4}$ et par croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{(\ln(x))^4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = +\infty$

8. $(6+x^2)e^x = 6e^x + x^2e^x$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} 6e^x = 0$ et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (6+x^2)e^x = 0$

9. Tel quel, il s'agit d'une forme indéterminée, mais on se doute que l'exponentielle domine. Comme d'habitude, on factorise par le terme dominant : $x^3 - e^{2x} = -e^{2x}\left(-\dfrac{x^3}{e^{2x}} + 1\right)$

or par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{2x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - e^{2x}) = -\infty$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(3+x^2)} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to1} \ln(x-1) - \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to1} (x^2-1)\ln(x-1) = 0$
5. $\lim\limits_{x\to1} (x-1)\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x+4) = 1$
7. $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2-9} = +\infty$
8. $\lim\limits_{x\to0} (1 - e^{-x^2/3}) = 0$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln(x) = 1$
10. $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-1/x} = 0$

2. Implicitement x est supérieur à 1 (sinon $\ln(x-1)$ n'est pas défini).
or $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x-1) = -\infty$

7. donc $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}\left(1 - \dfrac{1}{x+3}\right)$, or $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$
et $\lim\limits_{x\to3^+} 1 - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{5}{6}$
donc par produit $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2-9} = +\infty$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) - 2\ln x = \ln(1+x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$,
la fonction ln est continue, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) - 2\ln x = \ln 1 = 0$

10. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0$ d'où par composition $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Existence de limites

Exercice 8

Soit $a > 0$, fixé.

▷ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \varphi(x) = \ln(1+x) - x$

▷ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,$
$h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

▷ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$

1. Etudier les variations de h et de φ. Classique : calcul de dérivée...
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ à partir des études de fonctions ($\varphi(x) \leqslant 0$ et $h(x) \geqslant 0$)
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \dfrac{ax}{a+x} \leqslant \ln\big(f(x)\big) \leqslant a$
   $\ln(f(x)) = \ln\left[\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x\right] = x\ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$
   or, comme $\dfrac{a}{x} \in \mathbb{R}_+$, d'après la question précédente
   $\dfrac{\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) \leqslant \dfrac{a}{x}$ i.e. $\dfrac{a}{x+a} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) \leqslant \dfrac{a}{x}$
   donc $x\dfrac{a}{x+a} \leqslant x\ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) \leqslant a$ i.e. $\dfrac{ax}{a+x} \leqslant \ln\big(f(x)\big) \leqslant a$
4. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big)$, puis la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   On se doute qu'il faut de nouveau utiliser la théorème des gendarmes, on cherche donc à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax}{a+x}$ et on sait que

cette limite est égale au rapport des termes dominants, i.e. $\dfrac{ax}{x} = a$
en effet $\dfrac{ax}{a+x} = \dfrac{ax}{x(\frac{a}{x}+1)} = \dfrac{a}{\frac{a}{x}+1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax}{a+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{\frac{a}{x}+1} =$
a (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x} = 0$)
donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = a$
et donc par continuité de la fonction exponentielle $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\ln(f(x))) = e^a$ i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^a$

5. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, encadrer le nombre $\ln\big(g(x)\big)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(g(x)\big)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
Comme nous l'avons vu plus haut,
$\dfrac{a}{x+a} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) \leqslant \dfrac{a}{x}$ donc $x^2\dfrac{a}{x+a} \leqslant x^2 \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) \leqslant xa$
i.e. $\dfrac{ax^2}{a+x} \leqslant \ln\big(g(x)\big) \leqslant ax$, on se contentera de $\dfrac{ax^2}{a+x} \leqslant \ln\big(g(x)\big)$
comme vu plus haut
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax}{a+x} = a$ et $a > 0$ donc par produit x, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2}{a+x} = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(g(x)) = +\infty$ et donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\ln(g(x))) = +\infty$ i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Etude de continuité

Exercice 9

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si} \quad x < \dfrac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si} \quad x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = f\left(\dfrac{2}{3}\right)$
donc f est continue

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ 1 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = f(-2)$
donc f est continue

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$
donc f n'est pas continue

4. $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0 = f(1)$
donc f est continue

5. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$
donc f n'est pas continue

Exercice 10

Etudier la continuité des fonctions f suivantes, sur les intervalles I donnés.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ avec $I = \mathbb{R}_+$

f est continue sur $]0, +\infty[$ (opérations usuelles avec des fonctions continues), le seul problème de continuité possible est donc en 0, où c'est le terme $\sqrt{x}$ qui domine (au numérateur et au dénominateur)
en effet $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^{\frac{3}{2}}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^{\frac{3}{2}}+1}$ (dont la limite en 0 vaut 1), donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = 1 = f(1)$, donc f est continue en 0

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ avec $I =]-1, 1[$

si $x \in]-1, 0[$, alors $\lfloor x \rfloor = -1$ et $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = \dfrac{-1}{x}$ et donc $\lim\limits_{0^-} f = +\infty$, donc f ne peut pas être continue.
Il y a également un problème en 0^+, puisque pour $x \in]0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} f = 0 \neq f(0)$

3. $f(x) = x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ avec $I = \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$

pour $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, alors $\frac{1}{x} \in [2, 3[$, donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 2$

et la fonction $x \to x^2$ étant continue, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{9} \times 2 = \frac{2}{9}$

or $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$, donc f n'est pas continue

Exercice 11

Répondre aux questions suivantes pour

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f

1. la bonne définition de f est limitée par le logarithme, donc f est définie sur $]0, +\infty[$

2. Par définition $\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x)} = \exp\left(\ln(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\ln(x)(-\ln(x))\right) =$
donc $f(x) = e^{-(\ln x)^2}$
donc f est défine sur $]0, +\infty[$ (c'est de nouveau le logarithme qui limite la définition de f).

b) Justifier que f est continue sur $\mathscr{D}_f$

1. et **2.** Par opérations et composition (avec des fonctions continues), f est continue dans les deux cas.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

1. d'après le cours (croissances comparées), $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$
donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} e^{-(\ln x)^2} = 0$

d) Peut-on proposer une valeur pour $f(0)$ qui « prolonge f par continuité » ?

1. et **2.** on peut donc effectuer ce que l'on appelle un prolongement de f par continuité en définissant la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$ qui est alors définie et continue en 0

Nota bene : on définit une nouvelle fonction car le domaine de définition change (de fait rigoureusement ce n'est pas la même fonction).

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$

1. Dresser le tableau des variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$

   f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$
   de fait $f'(x) > 0$ sur $]0, 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$
   de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
   et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.
   On en déduit le tableau de variations complet ci-dessous (sachant que $f(1) = 1$) :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet exactement deux solutions, que l'on notera a et b, telles que : $0 < a < 1 < b$.

f est continue en tant que somme de fonctions continues, de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $]0, 1]$.
or f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ donc cette solution est unique, de plus ça ne peut pas être 1 car $f(1) = 1$.
Par le même raisonnement f, strictement croissante cette fois, admet une unique solution sur $]1, +\infty[$.
finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, une située sur l'intervalle $]0, 1[$ et une située sur l'intevalle $]1, +\infty[$.

3. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer que : $b \in [2, 4]$

Il suffit de calculer $f(2)$ et $f(4)$: $f(2) = 2 - \ln 2 < 0$ d'après la valeur de $\ln 2$ donnée par l'énoncé.
et $f(4) = 4 - \ln 4 = 2 - 2\ln 2 > 0$ d'après la valeur de $\ln 2$.
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires à nouveau, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution sur $[2, 4]$. Or d'après la question précédente, cette équation admet une unique solution b sur $]1, +\infty[$, donc $b \in [2, 4]$

Exercice 17

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x$

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$ (d'après le théorème de la bijection).
or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
donc $J =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ admet une unique solution, qu'on notera u_n

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $n \in]-\infty, +\infty[$ qui est l'ensemble image de f qui est bijective, donc l'équation $f(x) = n$, i.e. $e^x + x = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_{n+1}) - f(u_n) > 0$

Par définition de u_n, $f(u_n) = n$, donc $f(u_{n+1}) = n + 1$
donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ soit $f(u_{n+1}) - f(u_n) > 0$

4. En déduire la monotonie de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Comme f est croissante et que $f(u_{n+1})$ atteint une valeur plus important que $f(u_n)$, on se doute que $u_{n+1} > u_n$. On peut le démontrer en utilisant la réciproque.
Par propriété, comme f est continue et strictement croissante, c'est aussi le cas de f^{-1}
donc $f^{-1}(f(u_{n+1})) > f^{-1}(f(u_n))$ i.e. $u_{n+1} > u_n$
puisque par définition de f^{-1}, $f^{-1}(f(u_{n+1})) = u_{n+1}$ et $f^{-1}(f(u_n)) = u_n$

5. **a.** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln\big(n - \ln(n)\big) \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$

On va calculer les images par f (on connait déjà celle de u_n qui vaut n

de plus, $f(\ln\big(n - \ln(n)\big)) = e^{\ln\big(n - \ln(n)\big)} + n - \ln(n)$
$f(\ln\big(n - \ln(n)\big)) = n - \ln(n) + \ln\big(n - \ln(n)\big)$
or $n - \ln(n) < n$ donc par croissance de ln,
$\ln\big(n - \ln(n)\big) < \ln n$ et donc $-\ln(n) + \ln\big(n - \ln(n)\big) < 0$
et enfin $f(\ln\big(n - \ln(n)\big)) < n$
par ailleurs $f(\ln n) = e^(\ln n) + \ln n = n + \ln n$ donc $f(\ln n) > n$
En résumé, $f(\ln\big(n - \ln(n)\big)) < f(u_n) < f(\ln n)$ (car $f(u_n) = n$)
comme précédemment, en appliquant f^{-1} on trouve :
$f^{-1}(f(\ln\big(n - \ln(n)\big))) < f^{-1}(f(u_n)) < f^{-1}(f(\ln n))$
i.e. $\ln\big(n - \ln(n)\big) \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)}$

On va exploiter le résultat précédent et comme à l'exercice **16** on montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} n - \ln n = +\infty$

en effet $n-\ln n = n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ par croissances comparées
$\lim\limits_{n\to+\infty} n-\ln n=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc par propriété sur la composition des fonctions et des suites
$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(n-\ln(n)\big)=+\infty$
et donc par théorème des gendarmes (version infinie), $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\ln(n)}$, on exploite à nouveau l'inégalité que l'on divise par $\ln n$ qui est strictement positif (dès lors que $n\geqslant 2$)
donc $\dfrac{\ln\big(n-\ln(n)\big)}{\ln n}\leqslant\dfrac{u_n}{\ln n}\leqslant\dfrac{\ln(n)}{\ln n}=1$
or $n-\ln n=n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)$ donc
$\ln\big(n-\ln(n)\big)=\ln\left(n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)\right)=\ln n+\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)$
donc $\dfrac{\ln\big(n-\ln(n)\big)}{\ln n}=1+\dfrac{\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n}$
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\big(n-\ln(n)\big)}{\ln n}=1$ en effet :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)=0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n}=0$
donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\ln n}=1$

Exercice 18

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-x$

1. Etudier les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables
et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$
donc $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. Etudier les variations de g

g est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=f'(x)-1$
donc $g'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x-(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2}=\dfrac{-1-e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$
donc $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)<0$ (le numérateur est une somme de termes strictement négatifs)
donc g est strictement décroissante.

3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, qu'on notera α

g est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[$
or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$
(en effet $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^x}{e^x}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$)
donc g est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de fait l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution.

4. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$

g est strictement décroissante et $g(\alpha)=0$
donc $\forall x<\alpha, g(x)>g(\alpha)=0$ et $\forall x>\alpha, g(x)<0$

5. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 & > & \alpha\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n)\end{cases}$

a. Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n>\alpha$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $u_n>\alpha$
<u>Initialisation</u> : $u_0>\alpha$ donc $P(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie,
alors par hypothèse $u_n>\alpha$

et f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f(u_n) > f(\alpha)$ i.e. $u_{n+1} > 0$
donc $P(n+1)$ vraie
et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

b. En déduire que la suite u est décroissante. (On utilisera la question 3).

D'après **4.**, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$, i.e. $f(x) < x$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) < u_n$, i.e. $u_{n+1} < u_n$ soit u décroissante.

c. Justifier que u converge, et que sa limite vaut α

u est décroissante et minorée (par α)
donc d'après le théorème de la limite monotone, u converge.

Notons ℓ sa limite, alors par propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
et par continuité de f (f est un quotient de fonctions usuelles continues) : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
donc par unicité de la limite $f(\ell) = \ell$, i.e. $f(\ell) - \ell = 0$, soit $g(\ell) = 0$
donc d'après **3.**, $\ell = \alpha$ puisque cette équation admet une unique solution.