Corrigé

Code de partage avec Capytale : 534e-1427039

Extrait du sujet EML 2020

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation :

$$x^n + x - 1 = 0$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$

   Quel que soit n entier, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = nx^{n-1} + x$
   donc dès lors que $x > 0$, $f_n'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n

   f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue. De plus $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = +\infty$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$

   $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, donc l'unique solution de (E_n) appartient à l'intervalle $]0, 1[$

4. Déterminer u_1 et u_2

   D'après la définition donnée à la question **2.**, u_1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de $f_1(x) = 0$, i.e. $2x - 1 = 0$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$

   De même u_2 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de $f_2(x) = 0$, i.e. $x^2 + x - 1 = 0$
   or cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et les solutions sont :
   $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   donc la seule solution positive est $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ donc $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

5. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

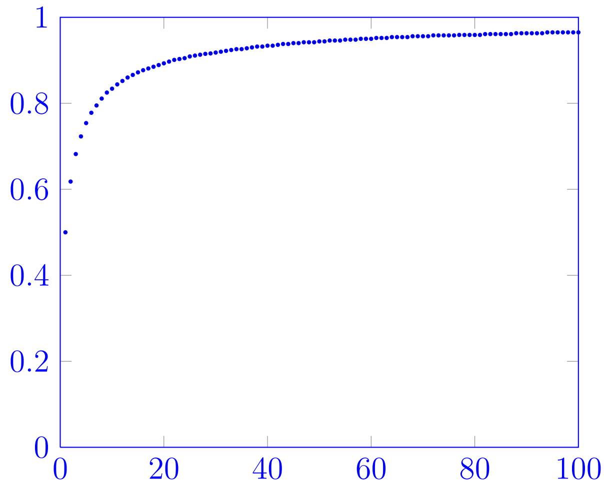
```python
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while b-a>10**(-3) : # tant que la précision n'est pas atteinte
        c = (a + b) / 2
        if (c**n + c - 1)>0 :
            b=c # on resserre l'intervalle à droite
        else :
            a=c # on resserre l'intervalle à gauche
    return c # on renvoie la valeur centrale du dernier intervalle calculé
```

(b) On représente alors les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on trouve le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

Le graphique était donné dans le sujet, ici on va le retrouver.
Pour représenter, par exemple les 100 premiers termes de la suite, il suffit de les calculer et de les consigner dans une liste :

```
u=[valeur_approchee(n) for n in range(1,101)]
x=[i for i in range(1,101)] #pour avoir une liste d'abscisse qui
    commence à 1
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ensuite, la commande `plt.plot(u)` suffit à représenter une liste de 100 valeurs. On préfe-rera `plt.plot(u,'+')` pour obtenir un nuage de points et l'ajout du x permet simplement de placer les points au-dessus des bonnes abscisses. Sinon le premier terme (qui correspond à u_1 ici) est placé par défaut au-dessus de l'abscisse 0



La lecture du graphique nous incite à penser que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers 1