

Quelques corrigés

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 - 2}{n^3}$$

On a besoin des résultats sur les séries de Riemann, $\frac{n^2 - 2}{n^3} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}$

on voit alors que $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 - 2}{n^3}$ est la combinaison linéaire de deux séries de Riemann, une divergente

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et une convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 - 2}{n^3}$ est divergente

Exercice 3

Pour n entier tel que $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{donc par continuité du logarithme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \ln(1) = 0 \text{ i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2. Pour $n \geq 2$, mettre $1 - \frac{1}{n}$ sous forme d'une fraction, puis transformer l'expression de u_n

$$u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est divergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n u_k$

Indication : on devra reconnaître une série très particulière.

d'après la question 2. $\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)$ par télescopage

or $\ln(n) \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = -\infty$

donc $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ i.e. $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge vers $-\infty$

Nota bene : il s'agit donc d'un cas où $u_n \rightarrow 0$ mais la série $\sum u_n$ ne converge pas.

Exercice 6

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq u_n$

1. a. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est elle aussi convergente.

cf. cours.

Le résultat ainsi démontré est encore valable pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.

- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ est convergente.

2. a. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente, vers $+\infty$.

cf. cours.

Le résultat ainsi démontré est encore valable pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.

- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Pour $n \geq 3, \ln(n) \geq \ln(3)$, (car \ln est croissante) donc $\ln(n) \geq 1$ car $\ln(3) \geq 1$ et donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$

donc pour $n \geq 3, \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k}$

or en utilisant le résultat sur les séries de Riemann, en particulier la série harmonique, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

diverge vers $+\infty$ donc $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$

et il s'agit d'une série à termes positifs donc $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n}$ n'est pas majorée et donc d'après l'in-

égalité démontrée précédemment, la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ n'est pas majorée non plus

or elle est à termes positifs, donc elle diverge vers $+\infty$

- c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n - 1 + (-1)^n e^{-n}}$ est divergente.

soit $n \geq 3$, alors $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et donc $-e^{-n} \leq (-1)^n e^{-n} \leq e^{-n}$ (car $e^{-n} \geq 0$)

comme a fortiori $n > 0$, alors $e^{-n} < 1$, donc $-1 \leq (-1)^n e^{-n} \leq 1$,

donc $n - 2 \leq n - 1 + (-1)^n e^{-n} \leq n$, donc $0 < n - 1 + (-1)^n e^{-n} \leq n$

et donc $\frac{1}{n - 1 + (-1)^n e^{-n}} \geq \frac{1}{n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$

puis on conclut comme au **b.** en comparant à la série harmonique.

Séries usuelles

Exercice 8

Cet exercice vise à démontrer la convergence des séries géométriques dérivée et dérivée seconde et à calculer leurs sommes.

Soit q un nombre réel tel que $|q| < 1$.

1. Soit p un entier, avec $p \geq 2$.

a. Justifier que la série $\sum_{n \geq p} q^n$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq p$, alors $\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$ et $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$

donc $\frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{q^p}{1 - q}$ et donc $\sum_{n \geq p} q^n$ converge et $\sum_{k=p}^{+\infty} q^k = \frac{q^p}{1 - q}$

b. Calculer la somme de cette série. cf. ci-dessus

2. a. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} nq^n$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in]-1; 1[$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$

alors $f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (somme des termes d'une suite géométrique)

par ailleurs f est dérivable et d'une part $f'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ et d'autre part,

$$f'(x) = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

or (comme $|x| < 1$) par croissance comparée $nx^n \rightarrow 0$ donc $(n+1)x^n \rightarrow 0$ et $nx^{n+1} \rightarrow 0$
donc $\frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2} \rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$, de fait $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge

et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, de fait par opération $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

b. Calculer la somme de cette série. cf. ci-dessus

3. a. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} n^2 q^n$ est convergente.

On poursuit avec $f(x)$ défini plus haut, alors d'une part $f''(x) = \sum_{k=1}^n k(k-1)x^{k-2}$

d'autre part $f''(x) = \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x)^2 - ((n+1)x^n + nx^{n+1} + 1)(-2(1-x))}{(1-x)^4}$
$$= \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x) + 2((n+1)x^n + nx^{n+1} + 1)}{(1-x)^3}$$

on peut simplifier un peu, mais aussi voir qu'au numérateur, à part le 2, tous les termes tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$

donc $\sum_{n \geq 1} n(n-1)x^{n-2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

b. Calculer la somme de cette série.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 q^k = \sum_{k=1}^n k(k-1)q^k + \sum_{k=1}^n kq^k = q^2 \sum_{k=1}^n k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^n kq^k$$

donc par opération sur les sommes de séries convergentes, d'après les résultats de la question précédente et de la question 2. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n = q^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q^2 + q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{q^2 + q}{(1-q)^3}$$

Exercice 9

Justifier que la série suivante est convergente, et calculer sa somme.

$$7. \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n}$$

On sépare les sommes, d'une part $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n}$ converge (car $\frac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$)

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

d'autre part

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1) + k}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{3^k} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3^2} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^{k-1}}$$

on reconnaît deux séries géométriques (dérivée seconde et dérivée) convergentes ($|q| = \frac{1}{3} < 1$) et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^{n-2}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{2 \times 3^3}{2^3} = \frac{3^3}{2^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{3^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3^2} \times \frac{3^3}{2^2} + \frac{1}{3} \times \frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$9. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 (-1)^n}{4^n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 (-1)^n}{4^n} &= \sum_{n \geq 0} n^2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n \geq 0} (n(n-1) + n) \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n \geq 0} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n \geq 0} n \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n \geq 1} n \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

donc $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 (-1)^n}{4^n}$ converge (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 (-1)^n}{4^n} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2}{\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2 \times 4^3}{5^3} - \frac{1}{4} \times \frac{4^2}{5^2} = \frac{2 \times 4}{125} - \frac{4}{25} = \frac{8}{125} - \frac{20}{125} = -\frac{12}{125} \end{aligned}$$