Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Déterminer une loi	1, 2, 8	3, 5, 6
Calculs espérance et variance	1, 2, 4, 7, 9, 10	5, 6
Lois usuelles	11, 12, 13, 16	14, 15, 17...

Exemples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1

On considère une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3, dans laquelle on effectue une succession de 4 tirages d'une boule avec remise et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Pour tout k de $[\![1;4]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ième}}$ tirage.

1. **a.** Exprimer l'événement $[X=4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $P(X=4)$

   b. Montrer que $P(X=2)=\dfrac{2}{3}$, et en déduire $P(X=3)$

2. Calculer l'espérance de X

Exercice 2

Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \ldots, n, \ldots$ On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de succès à la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Justifier que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, puis déterminer la loi de X, et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 3

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est $0,25$

1. Un client appelle le service à 4 reprises : soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où il a subi un retard.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X

   b. Calculer la probabilité de l'événement : « le client a subi au moins un retard ».

2. Au cours des années 2005 et 2006 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2005 (resp. 2006) définit une variable aléatoire réelle Y (resp. Z).

   a. Déterminer les lois de Y et Z. Montrer qu'elles admettent une espérance et une variance et la calculer.

   b. Calculer $P(Y \leqslant n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   c. On pose $T=\max(Y,Z)$. Calculer $P(T \leqslant n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la loi de T

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = a3^{-k}$$

1. Déterminer a
2. X a t-elle plus de chance de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. On pose $Y = X(X-1)$, montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une urne contient des jetons à deux faces :
- l'une des faces porte un numéro bleu, et l'autre porte un numéro rouge.
- on sait que pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$ et chaque $j \in [\![1, i]\!]$, il y a dans l'urne exactement un jeton qui porte le numéro i bleu, et j rouge.
- il n'y a pas d'autre jeton dans l'urne.

On note N le nombre total de jetons dans l'urne.

On tire un jeton dans l'urne. Soit B la variable aléatoire qui donne le numéro bleu du jeton, et R la variable aléatoire qui donne le numéro rouge du jeton pioché.

1. Donner le nombre de jetons avec le 1 bleu, le 2 bleu, le 3 bleu, puis déterminer N
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $P\big([B = i] \cap [R = j]\big)$
3. En déduire la loi de B, et la loi de R
4. Déterminer l'espérance de B et de R

Exercice 6

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en ajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire.
On note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsqu'on n'obtient jamais la boule noire, et qui vaut le numéro du tirage amenant la boule noire, sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n)$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$
4. En déduire $P(X = 0)$ et interpréter le résultat.

Exercice 7

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges ($n \geqslant 3$)
On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
- On appelle X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la première boule blanche.
- On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à ce moment.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$

Exercice 8

Agathe se prépare au C.A.P. de pâtisserie et compte proposer une originalité dans ses recettes en choisissant au hasard la proportion d'un ingrédient. Pour cela, elle lance un dé et l'ingrédient se retrouvera dans la recette en proportion égale au $n^{\text{ième}}$ du résultat du dé.
Calculer la proportion moyenne de l'ingrédient aléatoire.

Théorème de transfert

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et
$P(X = -1) = \dfrac{1}{4}$, $P(X = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$
On définit la variable aléatoire Y par $Y = |X|$

1. Donner la loi de Y puis calculer l'espérance de Y

2. Retrouver l'espérance de Y grâce au théorème de transfert.

Exercice 10

Soit $p \in [0, 1]$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer l'espérance de la variable aléatoires $e^{\alpha X}$

Lois usuelles

Exercice 11

Ewen est fan de Jimi Hendrix.

- quand un jour Ewen n'écoute pas de morceau de Jimi Hendrix, il en écoute un le jour suivant ;
- quand un jour Ewen écoute du Jimi Hendrix, il y a une chance sur trois pour que le lendemain, il n'en écoute pas.

Pendant 400 jours, on observe si Ewen écoute ou non du Jimi Hendrix.

- Le premier jour, Ewen écoute son guitariste préféré ;
- On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Ewen n'écoute pas de Jimi le $i^{\text{ième}}$ jour, et qui vaut 0 si il en écoute (pour $1 \leqslant i \leqslant 400$) ;
- On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de jours où Ewen n'écoute pas du Jimi.

1. Exprimer X en fonction des X_i

2. On note $p_i = P(X_i = 1)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant 400$)
Montrer que $p_i = -\dfrac{1}{3}p_{i-1} + \dfrac{1}{3}$ (pour $2 \leqslant i \leqslant 400$)

3. En déduire la loi de X_i (pour $1 \leqslant i \leqslant 400$), puis calculer $E(X)$

Exercice 12

Une urne contient 11 boules indiscernables numérotées de 1 à 11. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de tirages ayant amené une boule de numéro pair.

1. Donner la loi de X

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 13

En 2021, Gwendoline boit un jus de fruit frais tous les matins. Elle choisit chaque jour au hasard entre un jus de fraise, un jus de framboise, un jus de pomme, un jus d'ananas, un jus de pamplemousse et un jus d'orange. Soit X la variable aléatoire donnant le premier jour où elle choisit un jus de fruits rouges.

1. Donner la loi de X

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 14

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules noires, qui sont indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne deux tirages successifs d'une boule, sans remise.

- pour $k \in \{1, 2\}$, on note B_k l'événement : « on tire une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage » ;
- on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient deux boules de même couleur, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X
Indication : On pourra commencer par exprimer les événements à l'aide de B_1 et B_2

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 15

Dans une équipe de handball et quand le match se joue à l'extérieur, une joueuse est désignée pour récupérer tous les sacs dans les chambres après la troisième mi-temps. La joueuse doit alors ouvrir 10 portes avec 10 clefs différentes.
Quand elle est ivre, elle mélange à nouveau les clefs après chaque essai. Sinon, elle retire la mauvaise clef du trousseau.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la première porte quand elle est ivre.
Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'essais qui lui sont nécessaires pour ouvrir la première porte lorsqu'elle est sobre.

1. **a.** Déterminer la loi de X
   b. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.
2. **a.** Déterminer $Y(\Omega)$
   b. Déterminer la loi de Y
   c. Y admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.
3. **a.** Calculer $P(Y \geqslant 9)$
   b. Calculer $P(X \geqslant 9)$
   c. Sachant qu'une fois sur 3, la joueuse désignée est ivre et qu'un jour elle a essayé au moins 9 clefs, quelle est la probabilité qu'elle ait été sobre ce jour-là ?

Exercice 16

Un péage comporte 10 guichets, numérotés de 1 à 10.
Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. N suit une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$
Une voiture peut passer par n'importe quel guichet, de manière équiprobable et indépendamment des autres. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1 en 1 heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en 1 heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?
3. Soit $i \in \mathbb{N}$
   a. Pour $k \geqslant i$, calculer $P_{[N=k]}(X_1 = i)$
   b. Pour $k < i$, déterminer $P_{[N=k]}(X_1 = i)$
   c. Montrer que $P(X_1 = i) = e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{10}\right)^i \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-i}\dfrac{\lambda^k}{k!}$
   d. En déduire la loi de X_1 (on fera un changement d'indice dans la somme).
4. X_1 admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les déterminer.

Exercice 17

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- on dispose de k urnes, contenant chacune n boules numérotées de 1 à n ;
- on tire une boule au hasard de chaque urne, et on note N_j le numéro de la boule tirée de l'urne j (avec $1 \leqslant j \leqslant k$) ;
- on note X_n la variable aléatoire dont la valeur est le plus grand des numéros N_j obtenus.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$
2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $P(X_n \leqslant i)$.
3. En déduire la loi de X_n

Exercice plus difficile

Exercice 18

Soit $p \in [0,1]$

Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou d'une unité vers la gauche avec une probabilité de $q = 1-p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine O

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire réelle donnant l'abscisse de la puce à l'instant n

1. Déterminer $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$ et $X_3(\Omega)$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire D_n qui compte le nombre de bonds effectués vers la droite à l'instant n, et G_n la variable aléatoire qui donne le nombre de bonds effectués vers la gauche à l'instant n
   - **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que D_n et G_n suivent des lois usuelles.
   - **b.** Exprimer X_n en fonction de D_n et G_n
   - **c.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $D_n + G_n$?
   - **d.** En déduire l'expression de X_n à l'aide de D_n seulement.
   - **e.** Déterminer la loi de X_n
3. Déterminer l'espérance de X_n
4. Déterminer la variance de X_n

Exercices-type des sujets de devoir

Exercice 19

Soit $p \in]0,1[$.

On considère une urne initialement vide, et une pièce dont la probabilité d'obtenir pile après un lancer vaut p

On effectue une suite de lancers indépendants de la pièce. A chaque lancer de la pièce :

- si on obtient pile, on ajoute une boule dans l'urne.
- si on obtient face, on vide l'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans l'urne après le $n^{\text{ième}}$ lancer de la pièce.

- On convient que X_0 vaut constamment 0
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit Y_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient face au $n^{\text{ième}}$ lancer, et qui vaut 0 sinon.
- On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir face pour la première fois.

1. **a.** Reconnaître la loi de Y_i (pour $i \in \mathbb{N}^*$), préciser son espérance et sa variance.
   - **b.** Reconnaître la loi de T, préciser son espérance et sa variance.
2. **a.** Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$
   - **b.** Donner la loi de X_1
   - **c.** Justifier que $P(X_n = 0) = 1-p$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)
   - **d.** Calculer $P(X_n = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. **a.** Montrer que
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, n+1]\!], P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$
   - **b.** En déduire que
     $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], P(X_n = k) = p^k(1-p)$
   - **c.** Vérifier, uniquement à l'aide des formules donnant $P(X_n = k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$, que, pour $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$
4. **a.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$
   - **b.** En déduire que $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$

Exercice 20

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, et $p + q = 1$

Partie I

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaitre la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$

Partie II

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $[Y = 1] \cup [Z = 1]$ est égale à 1
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
- B_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- N_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

1. **a.** Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$, $P(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$

   b. Que doit valoir $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)$? Vérifier.

   c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$
2. **a.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $\mathrm{P}([X = k] \cap [Y = 1])$ *(on distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$)*

   b. En déduire $P(Y = 1) = q(1 + p)$

   c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y
3. Donner la loi de Z
4. Montrer que la variable aléatoire $X - 1$ est égale à la variable aléatoire YZ (produit des variables aléatoires Y et Z).
5. En déduire l'espérance de la variable aléatoire YZ