Corrigé *1 point par question*

1. En France, il y a environ 42% d'individus dont le groupe sanguin est O. La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus du groupe O dans un échantillon de 30 personnes. Quel type de loi suit X ?

En considérant que le fait qu'un individu soit de groupe sanguin O est le succès, alors X compte le nombre de succès lors de 30 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de $0,42$ donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0,42)$

2. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$, donner la définition de l'espérance de X

Par définition, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} kP(X = k)$

3. On lance quatre dés à six faces et X est la variable aléatoire égale à la somme des quatre chiffres obtenus. Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à l'obtention de quatre 1 et l'obtention de quatre 6 et toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes, donc $X(\Omega) = [\![4, 24]\!]$

4. X est une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 5]\!])$, que vaut $E(3X + 11)$?

Par linéarité de l'espérance $E(3X + 11) = 3E(X) + 11 = 3 \times 3 + 11 = 20$
car d'après les propriétés sur les lois uniformes $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1+5}{2} = 3$

5. Toujours avec $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 5]\!])$, et sachant que $V(X) = 2$, que vaut $V(3X + 4)$?

Par propriété de la variance, $V(aX + b) = a^2V(X)$ donc ici $V(3X + 4) = 9V(X) = 9 \times 2 = 18$

6. On lance deux fois une pièce et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de « pile » obtenus. Déterminer la loi de X

<u>Option A</u> : X compte le nombre de succès lors de 2 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de $0,5$ donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2; 0,5)$
<u>Option B</u> (à la main) : $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ (sur deux lancers, on peut obtenir entre 0 et 2 fois « pile »). De plus $P(X = 0) = P(F \cap F) = P(F)P(F)$ par indépendance des lancers, donc $P(X = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
de même $P(X = 2) = P(P \cap P) = P(P)P(P) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
et enfin $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = \dfrac{1}{2}$

7. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?
$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 9y & = & \pi \\ 11x & + & 42y & = & \ln(2) \end{array}\right.$ $A = \begin{pmatrix} 1 & (-9) \\ 11 & 42 \end{pmatrix}$ est la matrice associée au système et $\det A = 1 \times 42 - (-9) \times 11 = 42 + 99$ donc $\det A > 0$ donc $\det A \neq 0$ et donc A est inversible et donc le système est de Cramer, i.e. il n'admet qu'une seule solution.

8. Le système ci-contre est-il de Cramer ? Que cela signifie-t-il ?
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 2 \\ & - & y & + & 5z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 2 \\ & - & y & + & 5z & = & 3 \\ & & 0 & + & 9z & = & 8 \end{array}\right.$$
Le système est de Cramer, il admet donc une unique solution. En effet, le dernier système est de Cramer car il est triangulaire et tous ses pivots sont non nulset de fait c'est le cas du système initial.

9. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 14x & + & 1000y & - & 11z & = & 0 \\ 932x & - & 3y & + & 437z & = & 0 \end{array}\right.$$
Il s'agit d'un système non carré, donc il admet soit une infinité de solutions, soit aucune. Hors il est également homogène, donc il admet au moins une solution : $(0, 0, 0)$; de fait il admet une infinité de solutions.

10. Que fait le programme Python suivant ? Quelle valeur s'attend-on à obtenir ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
L=rd.geometric(0.01,1000)
print(np.mean(L))
```

Après avoir importé les bibliothèques `numpy` pour la moyenne et `numpy.random` pour la loi géométrique, le programme simule 1 000 réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $0,01$, puis calcule la moyenne de ces résultats. On s'attend à obtenir l'inverse du paramètre, soit 100 ici, car c'est l'espérance d'une telle loi.

ECG 1a **Interrogation rapide** **9 avril 2024**

Corrigé *1 point par question*

1. En France, il y a environ 12% d'individus dont le groupe sanguin est A^-. La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus du groupe A^- dans un échantillon de 40 personnes. Quel type de loi suit X ?

En considérant que le fait qu'un individu soit de groupe sanguin A^- est le succès, alors X compte le nombre de succès lors de 40 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de $0,12$ donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(40; 0,12)$

2. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, 12]\!]$, donner la définition de l'espérance de X

Par définition, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{12} kP(X = k)$

3. On lance quatre dés à six faces et X est la variable aléatoire égale à la somme des quatre chiffres obtenus. Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à l'obtention de quatre 1 et l'obtention de quatre 6 et toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes, donc $X(\Omega) = [\![4, 24]\!]$

4. X est une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 7]\!])$, que vaut $E(4X + 5)$?

Par linéarité de l'espérance $E(4X + 5) = 4E(X) + 5 = 4 \times 4 + 5 = 21$

car d'après les propriétés sur les lois uniformes $E(X) = \dfrac{a + b}{2} = \dfrac{1 + 7}{2} = 4$

5. Toujours avec $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 7]\!])$, et sachant que $V(X) = 4$, que vaut $V(4X + 3)$?

Par propriété de la variance, $V(aX + b) = a^2V(X)$ donc ici $V(4X + 3) = 4^2V(X) = 16 \times 4 = 64$

6. On lance deux fois un dé à six faces et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de chiffres pairs obtenus. Déterminer la loi de X

Option A : X compte le nombre de succès lors de 2 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de $0,5$ donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2; 0,5)$

Option B (à la main) : $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ (sur deux lancers, on peut obtenir entre 0 et 2 fois un nombre pair). De plus $P(X = 0) = P(I \cap I) = P(I)P(I)$ par indépendance des lancers , donc $P(X = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

de même $P(X = 2) = P(P \cap P) = P(P)P(P) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

et enfin $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = \dfrac{1}{2}$

7. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 7y & = & e \\ -15x & + & 33y & = & \ln(3) \end{array}\right.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -15 & 33 \end{pmatrix}$ est la matrice associée au système et $\det A = 1 \times 33 - 7 \times (-15) = 33 + 105$ donc $\det A > 0$ donc $\det A \neq 0$ et donc A est inversible et donc le système est de Cramer, i.e. il n'admet qu'une seule solution.

8. Le système ci-contre est-il de Cramer ? Que cela signifie-t-il ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 4 \\ & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 4 \\ & & 0 & + & 9z & = & 5 \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer, il admet donc une unique solution. En effet, le dernier système est de Cramer car il est triangulaire et tous ses pivots sont non nulset de fait c'est le cas du système initial.

9. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 141x & + & 10y & - & 911z & = & 0 \\ 2x & - & 39y & + & 77z & = & 0 \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système non carré, donc il admet soit une infinité de solutions, soit aucune. Hors il est également homogène, donc il admet au moins une solution : $(0, 0, 0)$; de fait il admet une infinité de solutions.

10. Que fait le programme Python suivant ? Quelle valeur s'attend-on à obtenir ?

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
L=rd.geometric(0.1,1000)
print(np.mean(L))
```

Après avoir importé les bibliothèques `numpy` pour la moyenne et `numpy.random` pour la loi géométrique, le programme simule 1 000 réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $0,01$, puis calcule la moyenne de ces résultats. On s'attend à obtenir l'inverse du paramètre, soit 100 ici, car c'est l'espérance d'une telle loi.