

Les réponses doivent être justifiées, si c'est du cours, on le mentionne.

1 point par question

1. Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1}$? $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1 - (-\frac{2}{3}))^2} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{1}$

Il s'agit de la série géométrique « dérivée » (avec $|q| = \frac{2}{3} < 1$)

2. Que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$? $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{k!} = e^{-3}$, il s'agit de la série exponentielle.

3. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donner la définition de l'espérance de X

X admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ converge

dans ce cas l'espérance vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$ et est notée $E(X)$

4. On lance deux dés à six faces, un rouge et un bleu. X est la variable aléatoire égale à la différence des deux chiffres obtenus (chiffre du dé rouge moins chiffre du dé bleu). Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à $1 - 6 = -5$ et $6 - 1 = 5$ et toutes les valeurs sont atteintes, donc $X(\Omega) = \llbracket -5, 5 \rrbracket$

5. Un dé comporte 5 faces avec le numéro 1 et une face avec le numéro 4. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu lors d'un lancer. Que vaut $E(X)$?

On commence par préciser la loi de X : d'une part $X(\Omega) = \{1, 4\}$, d'autre part $P(X = 1) = \frac{5}{6}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$ donc $E(X) = 1 \times \frac{5}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

6. X est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 4. Que vaut $E(5X - 3)$?

On utilise la linéarité de l'espérance : $E(5X - 3) = 5E(X) - 3 = 17$

7. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 6, 15 \rrbracket$, que vaut $P(X = 11)$?

Toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables avec une probabilité $\frac{1}{10}$ car il y a 10 valeurs. Donc $P(X = 11) = \frac{1}{10}$

8. Que vaut l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{3}$?

Par propriété sur les variables aléatoires suivant la loi binomiale : $E(X) = np = 12 \times \frac{1}{3} = 4$

9. X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, que vaut $P(X = 10)$?

Par propriété de la loi géométrique $P(X = 10) = pq^9 = p(1 - p)^9$ (correspond à 9 échecs, puis un succès)

10. Avec Python, créer une fonction qui renvoie 0 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et 1 avec la probabilité $\frac{5}{6}$

```
import random as rd
def alea():
    a=rd.randint(1,6)
    if a<6 :
        return 1
    else :
        return 0
```

Les réponses doivent être justifiées, si c'est du cours, on le mentionne.

1 point par question

1. Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}$? $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$

Il s'agit de la série géométrique « dérivée » (avec $|q| = \frac{7}{8} < 1$)

2. Que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-5)^k}{k!}$? $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-5)^k}{k!} = e^{-5}$, il s'agit de la série exponentielle.

3. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donner la définition de l'espérance de X

X admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ converge

dans ce cas l'espérance vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$ et est notée $E(X)$

4. On lance deux dés à six faces, un rouge et un bleu. X est la variable aléatoire égale à la différence des deux chiffres obtenus (chiffre du dé rouge moins chiffre du dé bleu). Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à $1 - 6 = -5$ et $6 - 1 = 5$ et toutes les valeurs sont atteintes, donc $X(\Omega) = \llbracket -5, 5 \rrbracket$

5. Un dé comporte 5 faces avec le numéro 1 et une face avec le numéro 6. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu lors d'un lancer. Que vaut $E(X)$?

On commence par préciser la loi de X : d'une part $X(\Omega) = \{1, 6\}$, d'autre part $P(X = 1) = \frac{5}{6}$ et $P(X = 6) = \frac{1}{6}$ donc $E(X) = 1 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}$

6. X est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 5. Que vaut $E(3X - 1)$?

On utilise la linéarité de l'espérance : $E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 14$

7. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 5, 14 \rrbracket$, que vaut $P(X = 7)$?

Toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables avec une probabilité $\frac{1}{10}$ car il y a 10 valeurs. Donc $P(X = 7) = \frac{1}{10}$

8. Que vaut l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{4}$?

Par propriété sur les variables aléatoires suivant la loi binomiale : $E(X) = np = 12 \times \frac{1}{4} = 3$

9. X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, que vaut $P(X = 13)$?

Par propriété de la loi géométrique $P(X = 10) = pq^{12} = p(1 - p)^{12}$ (correspond à 12 échecs, puis un succès)

10. Avec Python, créer une fonction qui renvoie 1 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et 0 avec la probabilité $\frac{3}{4}$

```
import random as rd
def alea():
    a=rd.randint(1,4)
    if a<2 :
        return 1
    else :
        return 0
```