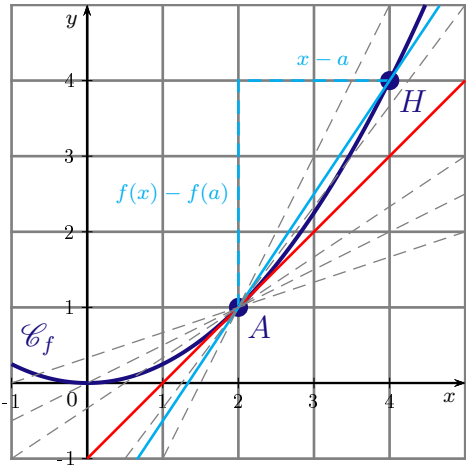


Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais toujours calculer des dérivées et étudier une fonction, mais aussi :

- montrer qu'une fonction est dérivable en un point et calculer la dérivée en ce point. ☐
- calculer des dérivées successives et utiliser les notations $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$ ☐
- énoncer et utiliser l'inégalité des accroissements finis. ☐
- démontrer qu'une fonction est convexe (ou concave) à l'aide des variations de sa dérivée. ☐

Dérivabilité

Définitions et propriétés	Exemples
<u>Définitions</u> : si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite lorsque x tend vers a, on dit que f est dérivable en a et la limite est appelée nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$	soit f définie par $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$ démontrons que f est dérivable en 2 et calculons $f'(2)$ $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{x^2}{4} - \frac{2^2}{4}}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{4(x - 2)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{4(x - 2)}$ donc $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x + 2}{4}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$ on en déduit que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 1$ <u>Non dérivabilité car limite infinie</u> : $x \rightarrow \sqrt{x}$ en effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
	<u>Remarques</u> : • graphiquement si A et H sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et x, lorsque le point H se rapproche de A et que la sécante à $\mathcal{C}_f$ (en gris ou bleu) admet une position limite (une droite limite), on peut parler de nombre dérivé et même plus (en rouge) • cela nous apporte aussi une définition : si f est dérivable en a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ <u>l'équation de la tangente</u> est alors $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ on peut extrapoler aux cas où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est infinie, ce qui correspond aux tangentes verticales
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a lorsqu'il existe un nombre ℓ tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$) <u>Propriété</u> : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et que les deux limites sont égales	On peut montrer que f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ est dérivable en } 0$ on trouve $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1 \dots = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ <u>Non dérivabilité car</u> $\lim_{x \rightarrow 0^-} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+}$: par exemple, $x \mapsto x$ En 0 la fonction valeur absolue n'est pas dérivable car sa limite à gauche vaut -1 et sa limite à droite vaut 1
<u>Définitions</u> : lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors l'application f' de I vers $\mathbb{R}$ qui à tout nombre a de I associe le nombre dérivée $f'(a)$. Cette application est appelée application dérivée de f	

<u>Bon à savoir</u> : si f est dérivable alors f est continue MAIS $\triangleleft$ la réciproque est fausse (cf. $x \mapsto x $)	
<u>Opérations sur les fonctions dérivables</u> : l'addition, le produit, le quotient (dès lors qu'il est bien défini) de fonctions dérivables est une fonction dérivable	Par opérations sur les fonctions usuelles dérivables, $x \mapsto 3 \ln(x)$, $x \mapsto (2x+1)e^x$, $x \mapsto \frac{3x^2+7}{x^9-8x}$ sont dérivables (là où elles sont définies)
<u>Opérations - rappels</u> : si f et g sont deux fonctions dérivables, λ et μ des réels, $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	
<u>Composition</u> : si f et g sont dérivables et si $g \circ f$ est définie alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$ i.e. $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$	Soit $f(x) = \ln(x^2+4)$ définie sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+4}$ (avec $u(x) = x^2+4$) <u>Remarque</u> : nous connaissons déjà cette formule dans des cas particulier, $\ln(u)$, e^u , $\sqrt{u}$ et u^n
<u>Réciproque</u> : si f est bijective et dérivable, alors dès lors que f' est non nul, sa réciproque f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$	La fonction carré (f) est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa réciproque (la fonction racine carrée) est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$ (i.e. $\mathbb{R}_+^*$) et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{2 \times \sqrt{x}}$
<u>Une méthode officielle</u> : calcul de limite à l'aide du nombre dérivé, ou comment calculer des limites en retournant le problème : on sait qu'une fonction est dérivable donc en tout point $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et vaut $f'(a)$ Ca donne des résultats étonnants, regardez plutôt (à droite)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ est une forme indéterminée que nous ne savons pas calculer, mais en remarquant que $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$ et sachant que $\ln$ est dérivable, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ De même $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$
<u>Approximation par la tangente</u> : au voisinage d'un point, une fonction est « proche » de sa tangente ce qui s'écrit $\forall x \in I, f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ où h est « petit » et ε est une fonction telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$	<u>Exemples officiels et limites officielles</u> : $e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ (e^x pour $x = 0$) $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ ($\ln$ en 1) $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h)$ ($(1+x)^\alpha$ en 0)

Les applications essentielles de la dérivation

Monotonie, extremum

<u>Propriété</u> : avec I un intervalle f est croissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geq 0$ f est décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leq 0$ f est constante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0$	<u>Remarque</u> : l'hypothèse « I intervalle » est indispensable. En effet avec $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ et pourtant f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f(-1) < f(1)$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
<u>Propriété</u> : de plus si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs alors f est strictement croissante (resp. décroissante).	Soit $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + 11$ alors $f'(x) = 2(x+1)^2(x-2)^2$ donc $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ uniquement pour $x = -1$ ou $x = 2$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

<u>Propriété - condition nécessaire d'extremum local :</u> si f admet un extremum local en a , et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$	<u>Remarques :</u> - la réciproque est fausse (cf. $f : x \mapsto x^3$ en 0). - dans la pratique, pour trouver on cherchera d'abord les solutions de $f'(x) = 0$ puis on étudiera la (les) solution(s) pour savoir s'il s'agit d'extremum.
<u>Propriété - condition suffisante d'extremum local :</u> si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a	On le démontre à l'aide des variations Attention, là encore la réciproque est fausse (fonctions constantes).

L'inégalité des accroissements finis

<u>Propriété - inégalités des accroissements finis :</u> s'il existe m et M deux réels tels que : $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$, alors $\forall (a, b)^2 \in I$, avec $a \leq b$, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ <u>Propriété - IAF bis :</u> s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in I, f'(x) \leq k$, alors $\forall (a, b)^2 \in I, f(b) - f(a) \leq k b-a $	<u>Remarque :</u> le fait que la dérivée soit bornée limite l'amplitude des variations de f - pour tous a et b tels que $a < b < -2 : 0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e^2}(b-a)$ en effet sur cette intervalle la dérivée d'exponentielle est inférieure ou égale à $\frac{1}{e^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ en effet la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est majorée par $M = \frac{1}{n}$ et minorée par $m = \frac{1}{n+1}$ sur $[n, n+1]$ donc avec $a = n$ et $b = n+1, b-a = 1$ et on obtient le résultat.
<u>Exercice-type d'application de l'IAF : étude d'une suite réursive :</u> avec $u_{n+1} = f(u_n)$ On étudie d'abord la fonction, ensuite (l'ordre peut changer) : - on trouve un point fixe de f, que l'on note α - on montre que u_n reste compris dans un certain intervalle I - on montre que f' est bornée sur I puis en appliquant l'IAF à u_n et α , on trouve : $ f(u_n) - f(\alpha) \leq k u_n - \alpha $, i.e. $ u_{n+1} - \alpha \leq k u_n - \alpha $ puis par récurrence on obtient $ u_n - \alpha \leq k^n u_0 - \alpha $ et enfin, si $k < 1$, on trouve $u_n \rightarrow \alpha$	

Dérivées successives

<u>Définitions :</u> soit f une application de I vers $\mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, lorsqu'elle existe, $f^{(n)}$ désigne l'application dérivée d'ordre n de f (ou application dérivée $n^{\text{ème}}$ de f) définie par récurrence : $f^{(0)} = f \text{ puis pour } n \geq 1, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$	<u>Remarques :</u> - pour $n = 2$, on parle de dérivée seconde - si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.
<u>Définitions :</u> - on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ (sur I) si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I - on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur I) si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$	La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions polynomiales aussi. Et ce n'est pas tout : fonctions inverse, ln, racine carrée (sur $\mathbb{R}_+^*$) ...

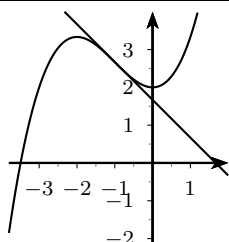
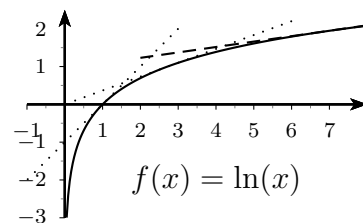
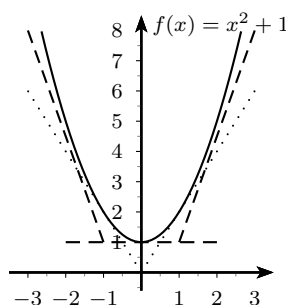
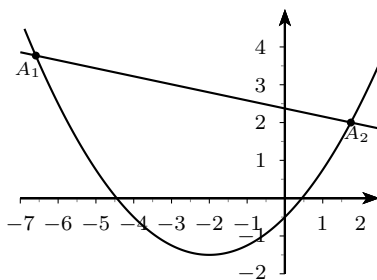
Propriétés - opérations sur les dérivées successives : si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ (ou $\mathcal{C}^\infty$) sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ (ou $\mathcal{C}^\infty$) sur I , de plus :

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}, \quad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

de même, si elles sont définies, $fg, \frac{1}{f}, \frac{f}{g}, g \circ f$ sont $\mathcal{C}^n$ (ou $\mathcal{C}^\infty$) mais on n'a pas de formule.

Convexité

<u>Définitions</u> : on dit que f est convexe (resp. concave) lorsque : pour tous réels $a \in I$ et $b \in I$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a : $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ [resp. $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$] <u>Propriété</u> : f est convexe $\Leftrightarrow -f$ est concave	<u>Interprétation géométrique</u> de la convexité (resp. concavité) : tout segment $[A_1, A_2]$, où (A_1, A_2) est un couple de points de la courbe, est situé au-dessus (resp. en-dessous) de la portion de $\mathcal{C}_f$ comprise entre A_1 et A_2, cf. premier graphique.
<u>Propriété</u> : si f est $\mathcal{C}^2$, alors il y a équivalence entre (i) f est convexe (ii) f' est croissante (ii) f'' est positive (iii) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes : $\forall x \in I, \forall a \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ Les équivalences analogues existent pour une fonction concave dérivable.	<u>Exemples</u> : • $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ ($f'(x) = -\frac{1}{x^2}$) • les fonctions carré et exp sont convexes. • la fonction ln est concave <u>Tangentes</u> : pour exp en 0 et ln en 1 • $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$ • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1$
<u>Propriété</u> : si la dérivée d'une fonction convexe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	<u>Interprétation</u> : comme la dérivée d'une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ est croissante, cela veut dire que dans ce cas, elle est négative puis nulle puis positive. donc la fonction f est décroissante puis croissante. <u>Exemple</u> : la fonction carré admet un minimum en 0
<u>Question économique</u> : si le coût est une fonction convexe, on peut chercher le bénéfice maximal.	



Définition : soit x_0 un nombre réel. Si f est convexe sur l'un des intervalles $[x_0 - \alpha, x_0]$ ou $[x_0, x_0 + \alpha[$ (avec $\alpha > 0$), et concave sur l'autre, on dit que le point M_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$

Remarque : cela signifie que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0 traverse $\mathcal{C}_f$ en M_0

Propriété : si f est $\mathcal{C}^2$ et $x_0 \in I$, n'est pas une extrémité de I , alors :

le point M_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.