Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y+4z &=& -1 \\ -x+2y-3z &=& 1 \\ x+4y-z &=& 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+2z &=& 1 \\ x-y-z &=& 3 \\ x+2z &=& -5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z-4t &=& -1 \\ 2x-3y-8z+7t &=& 8 \\ x+3y+5z-10t &=& -5 \\ 4x-y-6z-t &=& 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z+t &=& 1 \\ -x+y+z-t &=& 1 \\ x-y-z-t &=& 1 \\ x+y+z-t &=& 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -a+b-c+d-e &=& 0 \\ -a-b+c-d+e &=& 0 \\ a-b+c-d-e &=& 0 \\ a-b+c-d-e &=& 0 \\ 2b-2c+2d-2e &=& 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2z-2t+8u &=& 0 \\ x+2y+z+5u &=& 0 \\ -2x-4y-z-8u &=& 0 \end{cases}$

Exercice 2

Résoudre de tête les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y+z &=& 4 \\ x-y+z &=& 1 \\ x-y-z &=& -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y+5z-t &=& 2 \\ 2x-y+5z &=& 3 \\ 2x+2y+5z &=& 4 \\ 2x+5z &=& 5 \end{cases}$

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 3

Soit m un paramètre réel, et soit (S) le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$(S) : \begin{cases} (1-m)x+y+z=0 \\ x+(1-m)y+z=0 \\ x+y+(1-m)z=0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de Cramer ?

Exercice 4

Soit m un paramètre réel, et soit (S) le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$(S) : \begin{cases} (3-m)x+z=0 \\ x+(2-m)y-z=0 \\ x+(3-m)z=0 \end{cases}$$

Résoudre (S) suivant les valeurs de m

Inversion de matrice

Exercice 5

Soit A, B et C les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Résoudre les équations suivantes : $AX = (0) \quad AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad BX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad CX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemples d'applications

Exercice 7

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P(1) = 4 \quad P(-1) = 0 \quad P(-2) = -5 \quad P(2) = 15$$

Exercice 8

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On définit les matrices A et P suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

2. On pose $D = P^{-1}AP$

  a. Calculer D

  b. Donner D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$, en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^n

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

  a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$

  b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A^n et X_0

  c. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n