Quelques corrigés (notamment les exercices non abordés en classe).

Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

Le système **7.** a moins d'équations que d'inconnues, donc soit il n'admet aucune solution, soit il en admet une infinité. Comme il est homogène, il admet au moins $(0,0,0,0,0)$ et donc il admet une infinité de solutions. Ci-dessous deux résolutions : d'une part avec le pivot de Gauss classique (en travaillant sur des systèmes) et d'autre part avec la méthode des « inconnues invisibles »

$$\textbf{7.}\ \left\{\begin{array}{rcl} 2z-2t+8u &=& 0\\ x+2y+z+5u &=& 0\\ -2x-4y-z-8u &=& 0\end{array}\right. \qquad \textbf{7.} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0\\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & 0\end{array}\right)$$

$$\textbf{7.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+z+5u &=& 0 & L_1 \leftrightarrow L_2\\ z-t+4u &=& 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1\\ -2x-4y-z-8u &=& 0 &\end{array}\right. \qquad \textbf{7.} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0\\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & 0\end{array}\right)$$

$$\textbf{7.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+z+5u &=& 0 &\\ z-t+4u &=& 0 &\\ z+2u &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1\end{array}\right. \qquad \textbf{7.} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\textbf{7.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+z+5u &=& 0 &\\ z-t+4u &=& 0 &\\ t-2u &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2\end{array}\right. \qquad \textbf{7.} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$$

Pour conclure la résolution, dans les deux cas, on peut se ramener au système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2y-z-5u\\ z &=& t-4u\\ t &=& 2u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2y-3u\\ z &=& -2u\\ t &=& 2u\end{array}\right.$$

$\mathscr{S} = \{(-2y-3u, y, -2u, 2u, u), y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$ (il n'y a pas de contrainte sur y et u, les autres inconnues sont alors déterminées à partir de leurs valeurs).

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 4

Soit m un paramètre réel, et soit (S) le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{c} (3-m)x+z=0\\ x+(2-m)y-z=0\\ x+(3-m)z=0\end{array}\right.$$

Résoudre (S) suivant les valeurs de m.

$$(S) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (3-m) & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2-m & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3-m & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m & 0\\ 1 & 2-m & -1 & 0\\ (3-m) & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$(S) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m & 0\\ 0 & 2-m & -4+m & 0\\ 0 & 0 & 1-(3-m)^2 & 0\end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_2-L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3-(3-m)L_1$$

Par propriété le système est de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux du système triangulaires sont tous non nuls, i.e. ssi $2-m \neq 0$ et $1-(3-m)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ et $(3-m)^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2$ et $3-m = 1$ et $3-m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 2$ et $m \neq 2$ et $m \neq 4$

1^{er} cas : si $m \neq 2$ et $m \neq 4$
alors le système est de Cramer (donc il admet une unique solutin), or il est homogène (donc $(0,0,0)$ est solution)
donc $(0,0,0)$ est l'unique solution
$2^{\text{ème}}$ cas : si $m = 2$

alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ -2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ alors $\mathscr{S} = \{(0,y,0), y \in \mathbb{R}\}$ (pas de condition sur y)

$3^{\text{ème}}$ cas : si $m = 4$

alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ -2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ alors $\mathscr{S} = \{(z,0,z), z \in \mathbb{R}\}$

Inversion de matrice

Exercice 6

Inverser les matrices suivantes :

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

On va inverser le système $BX = Y$:

$$\begin{cases} x-ay=x' \\ y-az=y' \\ z-at=z' \\ t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'+ay \\ y=y'+az \\ z=z'+at \\ t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'+a[y'+a(z'+at')] \\ y=y'+a(z'+at') \\ z=z'+at' \\ t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'+ay'+a^2z'+a^3t' \\ y=y'+az'+a^2t' \\ z=z'+at' \\ t=t' \end{cases} \Leftrightarrow$$

donc B est inversible et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut aussi faire l'inversion avec les « inconnues invisibles »

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On utilise la méthode des « inconnues invisibles »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftrightarrow -L_2 \end{array}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exemples d'applications

Exercice 8

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On définit les matrices A et P suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

On utilise la méthode des « inconnues invisibles »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Nota bene : on sait déjà à ce stade que P est inversible grâce elle a été réduite à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \; L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \; L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

donc P^{-1} est inversible (on le savait déjà) et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. On pose $D = P^{-1}AP$

a. Calculer D

On s'attend à trouver une matrice diagonale, dans un premier temps on calcule AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

b. Donner D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par propriété sur les matrices diagonales,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$, en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : D^n = P^{-1}A^nP$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow D^0 = P^{-1}A^0P \Leftrightarrow I_3 = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$
donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $D^n = P^{-1}A^nP$
donc $A^{n+1} = A^n \times A = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$
donc $P(n+1)$ est vraie et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Et en inversant la formule $PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = I_3AI_3 = A$ on en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$
alors grâce à la question précédente, on peut expliciter A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 4 \times 2^n \\ 1 & -(-1)^n & 2 \times 2^n \\ 1 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^{n+2}}{3} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^{n+2}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} + \frac{2^{n+1}}{3} & \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} & 1 + \frac{(-1)^{n+1} - 2^n}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix}$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

or par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$

donc $AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ i.e. $AX_n = X_{n+1}$

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A^n et X_0

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(n) : X_n = A^nX_0$

<u>Initiation</u> : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow X_0 = A^0X_0 \Leftrightarrow X_0 = I_3X_0$ donc $Q(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $Q(n)$ est vraie
d'après la question précédente $X_{n+1} = AX_n$
or, par hypothèse de récurrence, $X_n = A^nX_0$
donc $X_{n+1} = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$ c'est-à-dire que $Q(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

c. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n

D'après la question précédente, $X_n = A^nX_0$

or par définition, $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{6} + \dfrac{2^{n+2}}{3} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^n - 2^{n+2}}{3} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} + \dfrac{2^{n+1}}{3} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^{n+1} - 2^n}{3} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{6} + \dfrac{2^n}{3} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

la dernière ligne de A^n suffit pour déterminer u_n, on trouve

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) - \left(1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - 1 + (-1)^n\left(\frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{3}\right) + 2^n\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{7}{6} \times (-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3} \end{aligned}$$