Corrigé

1 point par question

1. Dans une urne contenant 6 boules roses et 4 boules vertes, on effectue des tirages sans remise, jusqu'à obtenir deux fois consécutivement la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois la même couleur deux fois de suite. Que vaut $X(\Omega)$?

$X(\Omega) = \llbracket 2, 10 \rrbracket$ car on peut obtenir deux boules de la même couleur dès le deuxième tirage (mais pas avant) et dans le « pire des cas », on peut obtenir le tirage $RVRVRVRVRR$ qui donnera $X = 10$ et il est clair que toutes les valeurs intermédiaires sont également possibles.

2. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6 et on note X le rang d'apparition du premier 6. Que vaut $P(X \geq 2)$?

X suit une loi géométrique, car X donne le rang d'apparition du premier succès au cours de répétitions d'une même épreuve de Bernoulli, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

donc $P(X = 1) + P(X \geq 2) = 1$ et donc $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3. Une potière produit 200 articles par semaine, et 3% de ces articles contiennent un défaut et ne peuvent être vendus (les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres). On note X la variable aléatoire égale au nombre d'articles présentant un défaut au cours d'une semaine. Quelle est l'espérance de X ?

En considérant qu'un article contenant un défaut représente le succès, alors X compte le nombre de succès lors de 200 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de 0,03 donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(200; 0,03)$ et de fait $E(X) = 200 \times 0,03 = 6$

4. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?

$$\begin{cases} 30x + 17y = \sqrt{2} \\ -4x + 100y = 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 30 & 17 \\ -4 & 100 \end{pmatrix}$$
 est la matrice associée au système et $\det A = 30 \times 100 - 17 \times (-4) = 3000 + 68$ donc $\det A > 0$ donc $\det A \neq 0$ et donc A est inversible et donc le système est de Cramer, i.e. il n'admet qu'une seule solution.

5. Le système ci-contre est-il de Cramer ? Que cela signifie-t-il ?
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 9z - 11t = 14 \end{cases}$$

Ce système n'est pas carré, donc il admet soit une infinité de solution, soit aucune, de fait il n'est pas de Cramer (i.e. il n'admet pas une unique solution).

6. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Oui car A peut être réduite en une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

7. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{1+|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{1+|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1+|x|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+|x|} = 0$$

donc, cette limite étant finie, par définition f est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$)

8. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$? $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ d'après le cours.

9. Énoncer la propriété de l'inégalité des accroissements finis (une des deux versions suffit). cf. cours

10. Que fait le programme Python suivant ? Quelle valeur s'attend-on à obtenir ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
L=rd.poisson(30,10000)
print(np.mean(L))
```

Après avoir importé les bibliothèques `numpy` pour la moyenne et `numpy.random` pour la loi de Poisson, le programme simule 10 000 réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 40, puis calcule la moyenne de ces résultats. On s'attend à obtenir l'espérance d'une telle loi, qui vaut le paramètre, i.e. 40 ici.

Corrigé

1 point par question

1. Dans une urne contenant 4 boules roses et 6 boules vertes, on effectue des tirages sans remise, jusqu'à obtenir deux fois consécutivement la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois la même couleur deux fois de suite. Que vaut $X(\Omega)$?

$X(\Omega) = \llbracket 2, 10 \rrbracket$ car on peut obtenir deux boules de la même couleur dès le deuxième tirage (mais pas avant) et dans le « pire des cas », on peut obtenir le tirage $VRVVRVVRVV$ qui donnera $X = 10$ et il est clair que toutes les valeurs intermédiaires sont également possibles.

2. On lance un dé jusqu'à obtenir un 4 et on note X le rang d'apparition du premier 4. Que vaut $P(X \geq 2)$?

X suit une loi géométrique, car X donne le rang d'apparition du premier succès au cours de répétitions d'une même épreuve de Bernoulli, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\text{donc } P(X = 1) + P(X \geq 2) = 1 \text{ et donc } P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3. Une potière produit 300 articles par semaine, et 4% de ces articles contiennent un défaut et ne peuvent être vendus (les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres). On note X la variable aléatoire égale au nombre d'articles présentant un défaut au cours d'une semaine. Quelle est l'espérance de X ?

En considérant qu'un article contenant un défaut représente le succès, alors X compte le nombre de succès lors de 300 itérations d'une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est de 0,04 donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(300; 0,04)$ et de fait $E(X) = 300 \times 0,04 = 12$

4. Sans chercher à le résoudre, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions du système suivant ?

$$\begin{cases} 100x - 4y = 7 \\ 17x + 30y = \sqrt{2} \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 100 & -4 \\ 17 & 30 \end{pmatrix}$$
 est la matrice associée au système et $\det A = 100 \times 30 - (-4) \times 17 = 3000 + 68$ donc $\det A > 0$ donc $\det A \neq 0$ et donc A est inversible et donc le système est de Cramer, i.e. il n'admet qu'une seule solution.

5. Le système ci-contre est-il de Cramer ? Que cela signifie-t-il ?

$$\begin{cases} 4x - 15y = -4 \\ z + 13t = 9 \end{cases}$$

Ce système n'est pas carré, donc il admet soit une infinité de solution, soit aucune, de fait il n'est pas de Cramer (i.e. il n'admet pas une unique solution).

6. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 14 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Oui car A peut être réduite en une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

7. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{1 + |x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{1+|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{1+|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x(1+|x|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+|x|} = 0$$

donc, cette limite étant finie, par définition f est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$)

8. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$? $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ d'après le cours.

9. Énoncer la propriété de l'inégalité des accroissements finis (une des deux versions suffit). cf. cours

10. Que fait le programme Python suivant ? Quelle valeur s'attend-on à obtenir ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
L=rd.poisson(40,1000)
print(np.mean(L))
```

Après avoir importé les bibliothèques `numpy` pour la moyenne et `numpy.random` pour la loi de Poisson, le programme simule 1 000 réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 40, puis calcule la moyenne de ces résultats. On s'attend à obtenir l'espérance d'une telle loi, qui vaut le paramètre, i.e. 40 ici.