Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Equation homogène	1	tous
Conditions initiales	2	8, 9
Solution particulière	2, 3, 4, 5, 7	6, 8, 9
Applications	7	8, 9

Exercices de base

Exercice 1

Résoudre les équations homogènes :
a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $11y' - y = 0$
f) $y'' - 11y' + 30y = 0$ g) $y'' - \frac{1}{9}y = 0$ h) $y'' + y' + y = 0$

Exercice 2 - conditions initiales

a) Déterminer la solution de $y' + 2y = -4, y(1) = -3$

b) Déterminer la solution de $2y' - 3y = 9, y(-1) = 1$

c) Déterminer la solution de $y'' + 2y' - 3y = 9, y(0) = 0, y'(0) = 2$

Exercice 3 - Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y' - y = \pi$

b) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

c) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

Exercice 4 - Deuxième ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 4y = 12$

b) $y'' + 7y' + 12y = x$

Exercice 5 - extrait du sujet zéro Ecricome 2022

1. Donner les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$y' = 2y$$

2. Soit $c \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle

$$\mathscr{E} : y'(t) = 2y(t) + ce^{2t}$$

3. Déterminer toutes les solutions de $\mathscr{E}$

Exercice 6

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$E : y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

1. Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de E

2. Résoudre E

Exercices d'application

Exercice 7 - l'équation logistique

On appelle équation logistique, l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = aN(t)(1 - bN(t)) \quad \text{où} \quad (a, b) \in \mathbb{R}_+$$

Elle modélise l'évolution d'une population évoluant en milieu fermé.

1. Soit N une solution de cette équation qui ne s'annule pas.
   On pose $P = \dfrac{1}{N}$
   Montrer que P vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
2. Résoudre l'équation trouvée à la question **1.**
3. En déduire l'expression de N en fonction de t
4. Déterminer la limite de N lorsque t tend vers $+\infty$
   Interpréter le résultat.

Exercice 8 - Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne.

1. Montrer que $t \mapsto ate^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
2. Exprimer f en fonction de t et de a
3. On fixe $a = 5$
   Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
4. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ (on pourra utiliser une calculatrice).

Exercice 9

Exercice extrait d'un sujet de bac STI2D 2019 calculatrice autorisée

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.
A 20h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de $0,6\,\%$

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 dm^3
2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0; 690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20h et 7h30.
   On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle
   $$(E) : y' + 0,01y = 4,5$$
   a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E)
   b. Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 690]$,
   $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21h ?
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7h30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à $0,06\,\%$
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3