Un corrigé

Exercice 8 - Isthme

On a construit des ponts entre les iles d'un archipel de sorte de pouvoir aller (directement ou indirectement) de toute île à une autre. De plus, de chaque ile part un nombre pair de ponts. On a remarqué que, lorsqu'un pont est inaccessible pour cause de travaux, on peut encore aller de toute ile à une autre.

1. Traduire ce problème en terme de théorie des graphes.

Dans un graphe non orienté et connexe dont tous les sommets ont un degré pair, alors si on retire une arête, le graphe reste connexe.

2. Prouver le résultat !

On enlève une arête dans ce graphe.

Option 1 : on raisonne par l'absurde, supposons qu'alors le graphe ne soit plus connexe. Cela signifie qu'il existe deux sommets qu'on ne peut relier, appelons-les A et B. Il existe alors deux « sous-graphes » connexes : G_A (contenant A) et G_B (contenant B). Mais alors tous les sommets de G_A sont de degré pair sauf A, donc la somme des degrés est un nombre impair ce qui est contradictoire avec la formule d'Euler (des poignées de main).
Nota bene : on peut préciser l'existence de G_A et G_B. G_A est le graphe constitué de l'ensemble des points reliés à A sans passer par l'arête AB (avant sa suppression) et G_B est le graphe constitué de l'ensemble des points reliés à A par une (ou plusieurs) chaine(s) qui passe(nt) forcément par l'arête AB (avant sa suppression)

Option 2 : à l'aide des critères d'Euler

Comme le graphe est connexe, tous les sommets sont de degrés pairs et non nuls (s'il existait un sommet de degré 0 alors il ne serait pas relié aux autres et les graphe ne serait pas connexe). En ayant supprimé l'arête AB, tous les sommets du graphe sont de degré pair sauf A et B, i.e. au plus deux sommets ne sont pas de degré pair. Donc il existe une chaine eulérienne dans ce graphe, donc qui parcourt toutes les arêtes et donc tous les sommets car aucun n'est de degré nul, en particulier le graphe est connexe.