Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Calcul de primitive	1, 2 et 3	tous
Calcul d'intégrale	4, 6, 7, 8, 9	5
IPP - changement de variable	10 à 12, 14, 17, 18	13, 15, 16, 19, 20
Techniques classiques	21, 22, 24, 25	23, 26, 27

Calcul direct de primitives

Exercice 1 - les primitives évidentes

Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

fonction	primitive	fonction	primitive
$x \mapsto 5$		$x \mapsto 2x$	
$x \mapsto 3x^2$		$x \mapsto nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$x \mapsto e^x$		$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	

Exercice 2

Donner une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité :

$f_1(x) = e^{-3x+1}$

$f_2(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{2-x}$

$f_4(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

$f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$f_6(x) = \sqrt{1-x}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

$f_8(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 3

Donner une primitive des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

$x \mapsto e^{2x}$

$x \mapsto e^{-x}$

$x \mapsto xe^{-x^2}$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

$x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+2x}$

$x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^3}$

$x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$

$x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Calcul direct d'intégrales

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 e^{-2x+1}\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 (1+x)^3\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2\mathrm{d}x$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leqslant t < 0 \\ te^{-t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ pour $x > -1$ en séparant les cas $x < 0$ et $x > 0$

Exercice 6

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$

$I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $\qquad I_5 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

Exercice 7

Calculer :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

Exercice 8

Calculer :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^2}\mathrm{d}x$

Exercice 9

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(2-3x+5x^2-12x^3\right)\mathrm{d}x$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 (2e^x+3x)\mathrm{d}x$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 (2e^{-x}+3x^2)\mathrm{d}x$

Intégration par parties

Exercice 10

Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$

Exercice 11

Soit $x>0$, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ par intégration par parties.

En déduire une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 12

Soit $\varepsilon \in]0,1]$

Calculer $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)\mathrm{d}x$, puis calculer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 13

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$: $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0(x)$ pour $x \geqslant 0$ et calculer $J_0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_0(x)$

b) Montrer que, pour $x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x)$
En déduire, par récurrence que $J_n = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ est finie et que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad J_n = nJ_{n-1}$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad J_n = n!$

Exercice 14 - classique

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\mathrm{d}t$

1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}$$

2) A l'aide d'une majoration de l'intégrale, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

3) Déterminer la limite de nI_n quand $n\to+\infty$

Exercice 15

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e \left(\frac{t}{e}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$

1. Montrer que : $(n+1)I_n = e - \dfrac{e - e^{-n}}{n+1}$

2. En déduire la limite de $(n+1)I_n$ quand $n \to +\infty$

Exercice 16

Soit $x > 1$ et n un entier $n \geqslant 2$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^n}\mathrm{d}t$

Calculer $I_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = \frac{1}{(n-1)^2}$

Changement de variable

Exercice 17

Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln(x))}\mathrm{d}x$ par le changement de variables $u = \ln(x)$

Exercice 18

Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

1. Montrer à l'aide du changement de variables $s = -x$ que $I = 0$

2. Plus généralement, montrer que :

- pour une fonction f impaire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$
- pour une fonction f paire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 19

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$ par le changement de variables $u = e^x$

Exercice 20

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$ par le changement de variables $u = 1 + e^x$

Suites d'intégrales

Exercice 21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$

Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$

1. Vérifier que $1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$

2. En déduire que $0 \leqslant 1 - I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 23

Dans cet exercice, on fixe $x \in]0,1[$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$

1. On pose $T_n(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} t^j$, montrer que $S_n(x) = \displaystyle\int_0^x T_n(t)\mathrm{d}t$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$

3. Ecrire $T_n(t)$ comme un quotient.

En déduire que $\displaystyle -\ln(1-x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$

4. Montrer que $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-x}$

5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 24

Dériver la fonction G dans chaque cas, en précisant l'intervalle de validité.

a) $\displaystyle G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle G(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle G(x) = \int_x^{2x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$

Autres

Exercice 25

Calculer : $\displaystyle I_1 = \int_{-1}^1 e^{-|x|}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle I_2 = \int_{-2}^1 \frac{1}{1+|x|}\mathrm{d}x$

Exercice 26

On pose, $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1

2. Montrer : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

3. Montrer : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

4. Montrer : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Exercice 27

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite et la déterminer.

6. Déduire de la question **4.** une fonction Python qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

7. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

8. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$