

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- trouver des primitives de fonctions définies par une forme usuelle ☐
- calculer des intégrales à l'aide de la définition, d'une intégration par parties ou d'un changement de variables ☐
- exploiter les propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance ☐
- interpréter graphiquement une intégrale comme une aire ☐

1 Primitive

<u>Définition</u> : soit f une fonction f définie sur un intervalle I , on dit qu'une fonction F est une primitive de f lorsque elle est dérivable et que $F' = f$	<u>Exemples</u> : $F(x) = 3$ est une primitive de $f(x) = 0$ $G(x) = -5$ en est une autre $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$
<u>Propriété</u> : toute fonction continue admet une primitive	<u>Remarque</u> : toutes les fonctions usuelles sauf la partie entière (encore que...) admettent des primitives.

Les primitives de base

<u>Fonction</u> : $x \mapsto$	<u>Primitive</u> : $x \mapsto$	<u>Fonction</u> : $x \mapsto$	<u>Primitive</u> : $x \mapsto$
$c \quad (c \in \mathbb{R}^*)$	cx	x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	x^3	$\frac{x^4}{4}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$
$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	x^n	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	e^x	e^x

Remarque : $x \mapsto \ln(x)$ est bien une primitive de : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, mais pour avoir une primitive aussi sur $] -\infty, 0[$, il faut compléter d'où le $\ln |x|$ (qui vaut $\ln(-x)$ sur $] -\infty, 0[$)

Les primitives des composées de base

<u>Fonction</u>	<u>Primitive</u>	<u>Fonction</u>	<u>Primitive</u>
$u'u$	$\frac{u^2}{2}$	$u'u^2$	$\frac{u^3}{3}$
$u'u^3$	$\frac{u^4}{4}$	$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u'u^\alpha \quad \alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'\sqrt{u} = u'u^{\frac{1}{2}} \quad (u > 0)$	$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}} = u'u^{-\frac{1}{2}} \quad (u > 0)$	$2\sqrt{u} = 2u^{\frac{1}{2}}$
$u'u^{-1} = \frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u'e^u$	e^u

<u>Propriétés :</u> • si F est une primitive de f alors $\forall c \in \mathbb{R}, F + c$ est une primitive de f • si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction alors $\exists c \in \mathbb{R}, F_1 - F_2 = c$	<u>Exemple :</u> $x \mapsto 3x^2$ est une primitive de $x \mapsto 6x$ $x \mapsto 3x^2 + 11$ et $x \mapsto 3x^2 - 50$ en sont deux autres Les primitives (i.e. toutes) de $x \mapsto (2x - 5)(x^2 - 5x - 4)$ sont les fonctions $x \mapsto (x^2 - 5x - 4)^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$
---	---

2 Intégrale

<u>Définition :</u> f est une fonction continue sur $[a, b]$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ est le nombre $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ <u>Notation :</u> $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$	<u>Remarque :</u> si G est une autre primitive alors $G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c)$ $= F(b) - F(a) + c - c = F(b) - F(a)$ <u>Exemple :</u> $\int_0^3 e^{5x-2} dx = \left[\frac{1}{5} e^{5x-2} \right]_0^3 = \frac{1}{5} (e^{13} - e^{-2})$
<u>Convention :</u> si $a \leq b$, on peut parler de $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$	Cela est cohérent avec la définition : $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$

2.1 Premières propriétés de l'intégrale

<u>Propriété - linéarité de l'intégrale :</u> si f et g sont deux fonctions continues, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$	<u>Exemple :</u> $\int_{-1}^0 \left(3(x^4 + 2) - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$ $= 3 \int_{-1}^0 (x^4 + 2) - \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ $= 3 \left[\frac{x^5}{5} + 2x \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^0 = \dots$
<u>Propriété - relation de Chasles :</u> avec $a \leq b \leq c$ $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	<u>Remarque :</u> on peut l'étendre à plus de sous-intervalles $\int_0^{10} f = \int_0^1 f + \int_1^2 f + \dots + \int_9^{10} f$

2.2 Intégrale et inégalités

<u>Propriété - positivité de l'intégrale :</u> si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$	<u>⚠ Attention aux bornes :</u> il faut que $a \leq b$ <u>Remarque :</u> la propriété est évidente car si f est positive, alors toute primitive F est croissante et donc $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$
<u>Propriété - croissance de l'intégrale :</u> $\forall x, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$	<u>Remarque :</u> là aussi, on peut le démontrer facilement car $f(x) \leq g(x) \Rightarrow (f - g)(x) \leq 0$ $\Rightarrow \int_a^b (f - g)(x)dx \leq 0$ puis on conclut par linéarité de l'intégrale

Dans le cas où $m \leq f(x) \leq M$, on trouve $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$, ce qui permet de retrouver le résultat de l'inégalité des accroissements finis : $m(b - a) \leq F(b) - F(a) \leq M(b - a)$

<u>Propriété</u> : si $a \leq b$ $\left \int_a^b f(x) dx \right \leq \int_a^b f(x) dx$	<u>Exemple</u> : avec $0 \leq a \leq b$ $\left \int_a^b \frac{1-x}{1+x} dx \right \leq \int_a^b \left \frac{1-x}{1+x} \right dx \leq b-a$ car $\left \frac{1-x}{1+x} \right = \frac{ 1-x }{ 1+x } = \frac{ 1-x }{1+x} \leq \frac{ 1 + x }{1+x} = 1$
<u>Propriété</u> : si f est continue et positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$	<u>Exemple</u> : si $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ ($a < b$) $\forall x \in [a, b], f(x)^2 \geq 0$ et f^2 est continue donc d'après la propriété $f^2 = 0$ or $\forall x \in [a, b], f(x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ donc $f = 0$

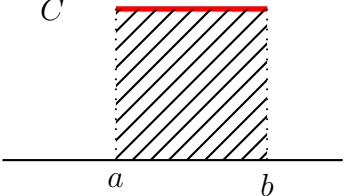
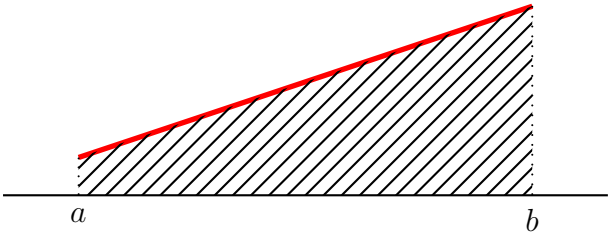
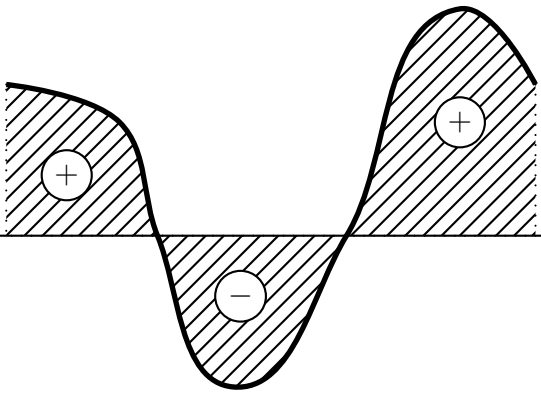
2.3 Primitive définie par une intégrale

<u>Propriété</u> : si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I c'est la primitive qui s'annule en a	<u>Exemple</u> : $\int_1^x \ln \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$ est une primitive de $t \mapsto \ln \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ c'est la primitive qui s'annule en 1
---	---

2.4 Techniques de calcul d'intégrale

<u>Propriété - intégration par parties</u> avec u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$	<u>Exemple</u> : $\int_1^2 x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx$ avec $u'(x) = x$ donc $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\int_1^2 x \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx$ $= 2 \ln(2) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{1}{2}$
<u>Propriété - changement de variable</u> avec $u : I \rightarrow J$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (strictement monotone) et f une fonction continue sur J $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx = \int_a^b f(u(t)) u'(t) dt$	<u>Exemple</u> : $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{e^{\ln(t)} - 1}{e^{\ln(t)} + 1} \times \frac{1}{t} dt$ avec $u(t) = \ln(t)$ et donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ $\triangle$ aux bornes, $u(a) = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $u(b) = 1 \Leftrightarrow \ln(b) = 1 \Leftrightarrow b = e$ donc $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{t - 1}{t(t+1)} dt$ or $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t}{t(t+1)} - \frac{t+1}{t(t+1)} = \frac{t-1}{t(t+1)}$ donc $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt$ $= 2[\ln t+1]_1^e - [\ln t]_1^e = 2 \ln(e+1) - 2 \ln(2) - 1$

3 Interprétation graphique - aire sous la courbe

 Fonction constante égale à C	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C dx = C(b-a)$ aire sous la courbe = $C(b-a)$
 Fonction affine	$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right) dx \\ &= \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{(x-a)^2}{2} + f(a)x \right]_a^b \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{(b-a)^2}{2} + f(a)(b-a) = \dots \\ &= (f(b) + f(a)) \frac{b-a}{2} \end{aligned}$ aire sous la courbe = $(b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$
<u>Propriété :</u> $\int_a^b f(x)dx = \text{aire sous la courbe } \mathcal{C}_f \text{ entre } a \text{ et } b$ <u>Remarque :</u> on parle d'aire algébrique car si f est négative alors l'aire est négative.	 Courbe de f et aire algébrique
<u>Propriété</u> - approximation de l'aire par la méthode des rectangles : si n tend vers $+\infty$ (i.e. les rectangles deviennent de plus en plus étroits) alors , $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$ autrement dit, lorsque leur largeur diminue, l'aire des rectangles se rapproche de la valeur de l'intégrale qui vaut l'aire sous la courbe.	