Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :
- montrer qu'un vecteur est (ou n'est pas) une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs ☐
- démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ☐
- démontrer qu'une famille de vecteurs est libre, génératrice ou une base ☐
- déterminer les caractéristiques d'une appli. linéaire noyau, image, range, matrice associée ☐

Le concept qui préside à ce chapitre est la linéarité. Depuis le collège, on parle de fonctions linéaires, par exemple $f(x) = 3x$. En fait, deux propriétés définissent la linéarité (ici d'une fonction) :
- l'additivité : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, ici c'est le cas car $f(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = f(x_1) + f(x_2)$
- la proportionnalité : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ici c'est le cas car $f(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda 3x = \lambda f(x)$

1 Espaces vectoriels

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définitions : un **espace vectoriel** est un ensemble dont les éléments peuvent être additionnés entre eux ou multipliés par un nombre réel, le résultat de l'opération étant toujours un élément de l'ensemble. Autrement dit, E est un espace vectoriel si toute combinaison linéaire d'éléments de l'ensemble est toujours un élément de l'ensemble. Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**. Les coefficients réels (λ) sont appelés **scalaires**	Les ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels. En effet (pour $\mathbb{R}^3$) avec $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ alors $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) appartiennent à $\mathbb{R}^3$ de même, les ensembles des matrices colonnes $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ldots, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels Il en existe beaucoup d'autres : l'ensemble des fonctions paires est un espace vectoriel.
Définition : avec E un espace vectoriel, lorsque $F \subset E$ est un espace vectoriel, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E Propriété : si E est un espace vectoriel, alors $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : • F est non vide • $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ • $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in F$	$F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ en effet, F est non vide car $(0, 0) \in F$ et $\forall X, Y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists x, y \in \mathbb{R}, X = (x, 0), Y = (y, 0)$ donc $\lambda X = (\lambda x, 0)$ et $X + Y = (x + y, 0)$ appartiennent à F

LA méthode officelle pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel : on montre en fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de quelque chose de plus gros.
1. on trouve l'ensemble plus gros
2. on précise que l'élément nul est dans l'ensemble (qui de fait est non vide)
3. on montre que pour tous x_1, x_2 de l'ensemble et tout λ réel λx_1 et $x_1 + x_2$ sont dans l'ensemble.

Propriété : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un (sous-) espace vectoriel	$(0, 0, 0)$ est toujours solution d'un système linéaire homogène (donc l'ensemble des solutions est non vide) et par exemple pour (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux solutions du système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ alors $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ est solution du système, en effet $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 = 0 + 0 = 0$ et $(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = y_1 - z_1 + y_2 - z_2 = 0 + 0 = 0$ de même $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ est solution du système

2 Familles de vecteurs : base, famille libre, famille génératrice

Définition : on dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **base** d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$	$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ forment une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car tout élément de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
Définition : on dit que les vecteurs $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$ car tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une unique combinaison linéaire de ces 3 vecteurs	$(5,-2,11)$ peut s'écrire $(5,-2,11) = 5(1,0,0) - 2(0,1,0) + 11(0,0,1)$ Remarque : on définit de même les bases canoniques pour n'importe quel espace $\mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Propriété : si un espace vectoriel admet une base de p vecteurs alors tout autre base a p vecteurs	Les exemples ci-dessus permettent d'affirmer que toute base de $\mathbb{R}^2$ a 2 vecteurs, toute base de $\mathbb{R}^3$ a 3 vecteurs.
Définition : on dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **famille génératrice** d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E se décompose sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$	Remarque : une base est une famille génératrice. Exemple : de fait $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, mais $((1,0),(0,1),(7,-15))$ l'est aussi.
Définition : on dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est **libre** d'un espace vectoriel E si $\forall(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!], \lambda_k = 0$	Remarque : autrement dit les vecteurs d'une famille libre ne peuvent pas être combinaison linéaire les uns des autres (« il sont libres » car « ils ne sont pas liés aux autres »).
Propriété : une famille de vecteurs est une base $\Leftrightarrow$ la famille est libre et génératrice	Remarque : cela illustre les deux volets de la base, tout vecteur admet une décomposition (génératrice) et cette décomposition est unique (libre).
Définition et propriété : le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. C'est un espace vectoriel que l'on note $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$	$\text{Vect}((1,0),(0,1)) = \{a(1,0) + b(0,1), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ $= \{(a,b), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ $\text{Vect}((1,1),(2,2)) = \{a(1,1) + b(2,2), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ $= \{(a+2b)(1,1), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ $= \text{Vect}((1,1))$

LA méthode officelle pour montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs, on écrit $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \dots$ (cf. exercices 2 et 3), puis on résout le système.

Définition : la **dimension** d'un espace vectoriel est le cardinal d'une de ses bases.	$\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 $\mathbb{R}^n$ est de dimension n
Propriété : une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Remarque : dans la pratique, on utilisera le plus souvent cette propriété pour démontrer qu'une famille est une base.
Définition : le **rang** d'une famille de vecteurs est le maximum du cardinal de ses sous-familles libres. Propriété : le rang de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est égal à la dimension $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$	Avec $X = (1,2,-1)$, $Y = (-3,-1,-5)$ et $Z = (-2,1,-6)$ (X,Y,Z) est de rang 2 puisque $X + Y = Z$ et donc $\forall a,b,c$ réels $aX + bY + cZ =$ $aX + bY + c(X+Y) = (a+c)X + (b+c)Y$ ce qui entraine $\text{Vect}(X,Y,Z) = \text{Vect}(X,Y)$

Propriété : les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont de dimension • 0, c'est alors $\{0\}$ • 1, ce sont tous les $\operatorname{Vect} u$ où $u \neq (0,0)$ • 2, c'est alors $\mathbb{R}^2$	Remarque : comme vu plus haut, dès lors qu'une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est libre, elle constitue une base de $\mathbb{R}^2$ Ce résultat se généralise à $\mathbb{R}^n$ (une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en est une base).

3 Applications linéaires

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définition : soit E et F des espaces vectoriels, une application de E dans F est dite **linéaire** si $\forall (x,y) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{cases}$ que l'on peut aussi résumer en $\forall (x,y) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x+y) = \lambda f(x)+f(y)$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$ alors avec $X=(x,y), Y=(x',y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on trouve $f(\lambda X+Y) = f((\lambda x+x', \lambda y+y')$ $= (\lambda x+x'+\lambda y+y', 2(\lambda x+x')-(\lambda y+y')$ $= \ldots$ puis on calcule $\lambda f(X)+f(Y)$ et on vérifie l'égalité *Voir exercices 13.1, 13.2, 14 et 15*
Définition : le **noyau** d'une application linéaire est l'ensemble des antécédents de 0 par cette application on le note $\ker f$ (avec f l'application).	soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$ alors $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ donc $\ker f = \{(\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$
Propriété : le noyau et l'image d'une application linéaire sont des (sous-) espaces-vectoriels. En particulier $0 \in \ker f$ et $0 \in \operatorname{Im} f$ On note $\operatorname{Im} f$ l'image	avec l'exemple précédent, on en déduit que $\ker f = \{(\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $\operatorname{Im} f$ sont des espaces vectoriels. pour $\operatorname{Im} f$, ce n'est pas un scoop car $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
Propriété : pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\begin{array}{c} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto MX \end{array}$ est une application linéaire.	Avec $M = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $X \mapsto MX = \begin{pmatrix} -4x+7y \\ -x+2y \end{pmatrix}$ est une application linéaire
Définition : le **rang d'une matrice** A est le rang de la famille des vecteurs colonnes de la matrice A, on le note $\operatorname{rg}(A)$	$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2$ car $\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ forment une famille libre
Propriété : pour une matrice $A, \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA)$	On peut donc étudier indifféremment le rang des vecteurs colonnes ou celui des vecteurs lignes
Théorème du rang : soit f l'application linéaire définie par la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ i.e. $f: \begin{array}{c} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto MX \end{array}$ alors $\dim(\ker f) + \operatorname{rg}(M) = n$	avec l'exemple précédent, $\dim(\ker f) = 2-2 = 0$ car $\operatorname{rg}(M) = 2$ donc $\ker f = \{0\}$ i.e. le noyau est réduit à l'élément nul.