Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\beta \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$
2. Démontrer que $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

Exercice 2

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrer que v_4 est combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3

Exercice 3

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Montrer que v_3 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs v_1 et v_2

Exercice 4

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et justifier la réponse.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x - 2y = 1 \right\}$

Exercice 5

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + 2z = 0 \right\}$

Exercice 6

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

Exercice 7

Soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Montrer que $\text{Vect}(u,v) = \text{Vect}(w_1, w_2)$

Bases

Exercice 8

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$

Soit $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, et $u_2 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

Montrer que (u_1, u_2) est une base de F

Exercice 9

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

Trouver une base de F

Exercice 10

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \right\}$

Trouver une base de F

Exercice 11

Soit $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, et $u_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 12

Soit F l'ensemble des

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 + 18x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

Déterminer une base de F

Applications linéaires

Exercice 13

Déterminer, pour les applications suivantes, si elles sont ou non linéaires, et démontrer la réponse.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}2x - y + z\\ x + y\end{pmatrix} \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} & \mapsto & x_1 + 6x_2 \end{array}$

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x^2 + y\\ x + z\end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 14

Dans chacun des cas ci-dessous,
(a) Montrer que l'application f est linéaire.
(b) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
(c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.
(d) Déterminer la matrice de l'application f

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}3x_1 - x_2\\ 0\\ -3x_1 + x_2\end{pmatrix} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x_1 + x_2 + 2x_3\\ x_2 - x_3\\ x_1 + 3x_3\end{pmatrix} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}y\\ x - y + z\end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 15

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,x,z) \end{array}$

1. Justifier que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$
2. Montrer que $E_{-1}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = -X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base e_1
3. Montrer que $E_1(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base (e_2, e_3)
4. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer la matrice A qui définit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ égale à f
6. Soit B et P les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Déterminer P^{-1} puis montrer que $A = PBP^{-1}$

Exercice 16

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ 2x + 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix} \end{array}$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX$
2. Montrer que $V = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel.

   Justifier que V possède une base constituée de deux vecteurs, que l'on notera u_1 et u_2
3. On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
4. Déterminer $\ker f$

   Que peut-on en déduire pour l'application f ?
5. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et en donner une base. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Exercice 17 - pour aller un peu plus loin

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x + y + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques.
3. Montrer que f est bijective.
4. Déterminer f^{-1}
5. Déterminer la matrice B de f^{-1} dans les bases canoniques.
6. Calculer A^{-1}

   Que constate-ton ?