Calcul direct de primitives

Exercice 1 - les primitives évidentes

Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

fonction	primitive	fonction	primitive
$x \mapsto 5$	$x \mapsto 5x$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto x^2$
$x \mapsto 3x^2$	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	$x \mapsto x^n$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x^\alpha$

Exercice 2

Donner une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité :

$f_1(x) = e^{-3x+1} \qquad F_1(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$

$f_2(x) = \frac{1}{2+x} \qquad F_2(x) = \ln|2+x|$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$f_3(x) = \frac{1}{2-x} \qquad F_3(x) = -\ln|2-x|$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

$f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad F_4(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$

$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad F_5(x) = -2\sqrt{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$

$f_6(x) = \sqrt{1-x} \qquad F_6(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ sur $]-\infty, 1]$

$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \qquad F_7(x) = \sqrt{1+2x}$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f_8(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad F_8(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Donner une primitive des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

$f(x) = e^{2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = e^{-x}$, $F(x) = -e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = xe^{-x^2}$, $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$, $F(x) = \ln|x+1|$ sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $F(x) = -\ln|1-x|$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{1+2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln|1+2x|$ sur $]-\infty, -1/2[\cup]-1/2, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $F(x) = -\frac{1}{1+x}$ sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $F(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$, $F(x) = -\frac{1}{2(1+x)^2}$ sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, $F(x) = \frac{1}{2(1-x)^2}$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $F(x) = \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $F(x) = 2\sqrt{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leqslant t < 0 \\ te^{-t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ pour $x > -1$ en séparant les cas $x < 0$ et $x > 0$

1[er] cas : si $x \in]-1, 0[$

comme $\forall t \in]-1, 0[, f(t) = 1,$

alors par définition $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x} 1\mathrm{d}t = [t]_{-1}^{x} = x - (-1) = x + 1$

2[ème] cas : si $x > 0$

alors d'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} 1\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} te^{-t^2}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t = [t]_{-1}^{0} = 0 - (-1) = 1$ et

$$\int_{0}^{x} te^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{0}^{x} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right)$$

car $t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ est une primitive de $t \mapsto te^{-t^2}$

finalement dans ce cas $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$

Exercice 6

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - 1$ $\qquad I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

$I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{2} - 1)$ $\qquad I_5 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

Exercice 7

Calculer :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{e^2 - 1}{2}$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln(2)$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e - 1)$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Exercice 8

Calculer :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{e}$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{2} - 1)$ $\qquad I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

Exercice 9

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(2 - 3x + 5x^2 - 12x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 (2e^x + 3x)\mathrm{d}x = 2e - \frac{1}{2}$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_0^1 (2e^{-x} + 3x^2)\mathrm{d}x = 3 - \frac{2}{e}$

Suites d'intégrales

Exercice 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$

1. Vérifier que $1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I_n + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

donc $I_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1 - I_n$

2. En déduire que $0 \leqslant 1 - I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

$\forall x \in [0,1], 1 + x^n \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$

donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$

d'où $0 \leqslant 1 - I_n \leqslant \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$ et avec le théorème des gendarmes, on déduit : $1 - I_n \to 0$ donc $I_n \to 1$

Exercice 23

Dans cet exercice, on fixe $x \in]0,1[$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

1. On pose $T_n(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} t^j$, montrer que $S_n(x) = \displaystyle\int_0^x T_n(t)\mathrm{d}t$

D'après la linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x T_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^x t^j\mathrm{d}t$

Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^x t^j\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{j+1}}{j+1}\right]_0^x = \frac{x^{j+1}}{j+1}$

donc $\displaystyle\int_0^x T_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{j+1}}{j+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = S_n(x)$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = [-\ln|1-t|]_0^x = -\ln|1-x| = -\ln(1-x)$
car $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$

3. Ecrire $T_n(t)$ comme un quotient.
En déduire que $-\ln(1-x) - S_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$

$T_n(t) = \dfrac{1-t^n}{1-t}$ pour $t \neq 1$ (somme des termes suite géométrique)
On en déduit avec la linéarité de l'intégrale
$-\ln(1-x) - S_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t} - \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$

4. Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-x}$

$t \leqslant x \Rightarrow -t \geqslant x \Rightarrow 1 - t \geqslant 1 - x \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

donc $\forall t \in [0,x] \quad 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}$

donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t$

et $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}$
Enfin, comme $0 \leq x \leqslant 1$: $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$, donc
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1}$

5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$

On en déduit, pour $x \in [0,1[$ (x fixé)
$0 \leqslant -\ln(1-x) - S_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{n+1}$
donc d'après le théorème des gendarmes, $-\ln(1-x) - S_n(x) \to 0$ et donc $S_n(x) \to -\ln(1-x)$ (attention, c'est n qui tend vers $+\infty$), donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k}$ converge pour $x \in [0,1[$, et sa somme vaut $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$

Autres

Exercice 25

Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{1+|x|}\mathrm{d}x = \ln(3)+\ln(2)$

Exercice 27

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

Par définition $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$
car $x \mapsto \ln|1+x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

$\forall x \in [0,1], \dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$ donc u_n est l'intégrale d'une fonction positive (avec $a < b$) donc $u_n \geqslant 0$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1-1}}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} - \frac{x^{n-1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$
donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}\mathrm{d}x$, et $\forall x \in [0,1], \dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$ donc $\dfrac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} \leqslant 0$
donc $u_{n+1} - u_n$ vaut l'intégrale d'une fonction négative (avec $a < b$), donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors de même, $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x$
donc $u_{n+1} + u_n = \left[\dfrac{x^n}{n}\right]_0^1 = \dfrac{1^n}{n} - \dfrac{0^n}{n} = \dfrac{1}{n}$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite et la déterminer.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0 par exemple), donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone et en notant ℓ sa limite, $u_n \to \ell \Rightarrow u_{n+1} \to \ell$ par propriété
donc $u_{n+1} + u_n \to 2\ell$ par addition, de plus $\dfrac{1}{n} \to 0$ (limite usuelle)
et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$
donc par unicité de la limite $2\ell = 0$ et donc $\ell = 0$

6. Déduire de la question **4.** une fonction Python qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

La relation de la question **4.** nous permet de trouver le terme d'indice $n+1$ qui vaut $\frac{1}{n}$ moins le terme d'indice n. En partant de $u_1 = \ln(2)$ on calcule u_n de manière itérative grâce à cette formule.

```
import numpy as np

def u(n):
  u=np.log(2)
  for i in range(2, n+1)
    u=1/(i-1)-u
  return u
```

7. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité : $\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Soit $n \geqslant 2$, d'après **3.** $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $u_{n+1}+u_n \leqslant 2u_n$, or d'après **4.** $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n} \leqslant 2u_n$
de même $u_n \leqslant u_{n-1} \Rightarrow 2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$ i.e. $2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$ (car $n \geqslant 2$) d'où le résultat
puis on retrouve la limite avec le théorème des gendarmes car $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n+1} \to 0$

8. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$

D'après **7.**, $\forall n \geqslant 2, 1 \leqslant 2nu_n \leqslant \frac{n}{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant nu_n \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{n}{n-1}$
or $\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \to 1$ donc par théorème des gendarmes, $nu_n \to \frac{1}{2}$