Quelques corrigés

Exercice 7

Soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w_1, w_2)$

Un raisonnement intéressant pour montrer l'égalité de deux ensembles, il s'agit de démontrer la double inclusion.
dans un premier temps, si on arrive à démontrer que $w_1 \in \text{Vect}(u, v)$ et $w_2 \in \text{Vect}(u, v)$ alors on obtient que $\text{Vect}(w_1, w_2) \subset \text{Vect}(u, v)$ car toute combinaison linéaire de (w_1, w_2) est alors combinaison de u et v si w_1 et w_2 se décompose sur ces vecteurs.
Montrons-le : $w_1 \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\mu_1 \in \mathbb{R}, w_1 = \lambda_1 u + \mu_1 v$ et on résoud alors le système :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\mu_1 &= 1 \\ \lambda_1 + 2\mu_1 &= 0 \\ -3\lambda_1 - \mu_1 &= -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\mu_1 &= 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2\lambda_1 + 3\mu_1 &= 1 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -3\lambda_1 - \mu_1 &= -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\mu_1 &= 0 \\ -\mu_1 &= 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5\mu_1 &= -5 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= -2\mu_1 = 2 \\ \mu_1 &= -1 \end{cases}$ (L_2 et L_3 donnent $\mu_1 = -1$) autrement dit : $w_1 = 2u - v$
de même (ou de manière évidente), on trouve $w_2 = v - u$
donc à ce stade, comme évoqué en introduction, on a montré que $w_1 \in \text{Vect}(u, v)$ et $w_2 \in \text{Vect}(u, v)$ et de fait que $\text{Vect}(w_1, w_2) \subset \text{Vect}(u, v)$
on peut faire de même pour l'autre inclusion ou, ce qui est plus rapide, inverser les deux relations que nous venons d'obtenir :

$$\begin{cases} w_1 &= 2u - v \\ w_2 &= -u + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 &= u & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ w_1 + 2w_2 &= v & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

donc $u \in \text{Vect}(w_1, w_2)$ et $v \in \text{Vect}(w_1, w_2)$ et donc par le même raisonnement $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w_1, w_2)$
finalement, du fait des deux inclusions, $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w_1, w_2)$

Bases

Exercice 8

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Montrer que (u_1, u_2) est une base de F

Comme $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 3x_3$ on peut écrire
$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ donc
$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$
i.e. $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, donc (u_1, u_2) est clairement une famille génératrice de F, de plus c'est une famille libre car les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, c'est donc une base de F

Exercice 9

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

Trouver une base de F

Exercice 10

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \right\}$

Trouver une base de F

Exercice 11

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Comme (u_1, u_2, u_3) est une famille à trois éléments et que $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ alors $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$ et en faisant $L_1 - L_3$ on trouve d'emblée $\lambda_1 = 0$

alors L_2 et L_3 donnent $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 & \\ -\lambda_3 & = & 0 & 2L_3 - L_2 \end{array} \right.$ donc $\lambda_3 = 0$ et de fait $\lambda_2 = 0$, et finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre

or, comme évoqué plus haut, $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 3

donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 12

Soit F l'ensemble des

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 + 18x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

Déterminer une base de F

Applications linéaires

Exercice 13

Déterminer, pour les applications suivantes, si elles sont ou non linéaires, et démontrer la réponse.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y \end{pmatrix} \end{array}$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $f(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix}$
donc pour $X, X' \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$f(\lambda X + X') = A(\lambda X + X') = A(\lambda X) + AX' = \lambda AX + AX' = \lambda f(X) + f(X')$ d'après les règles sur les opérations matricielles
donc f est une application linéaire

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1 + 6x_2 \end{array}$

De même en passant par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2 + y \\ x + z \end{pmatrix} \end{array}$

On pressant que le x^2 empêche la linéarité, on va donc se contenter de jouer sur le x

on pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors par définition $f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et par ailleurs $f(2X) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $f(2X) \neq 2f(X)$ et de fait f n'est pas linéaire

Exercice 14

Dans chacun des cas ci-dessous,
(a) Montrer que l'application f est linéaire.
(b) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
(c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.
(d) Déterminer la matrice de l'application f

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

<u>Noyau</u> : $X \in \ker f$

$\Leftrightarrow f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_3 + x_3 + 2x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_1 & = & -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_1 & = & -3x_3 \end{cases}$

donc $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker f$ car c'en est une famille génératrice (par définition du Vect) et c'est une famille libre (car composée d'un seul vecteur, non nul)

Image : $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_2+2x_3 \\ x_2-x_3 \\ x_1+3x_3 \end{pmatrix}, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \right\}$ donc

$\operatorname{Im} f = \left\{ x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$

donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (par définition du Vect) mais elle n'est pas libre puisque $3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ (on peut aussi le trouver en étudiant la liberté de la famille : $\lambda_1 U_1 + \lambda_1 U_1 + \lambda_1 U_1 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ nous amène au même système que le noyau)

donc $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Im} f$

et cette fois $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est bien une base de $\operatorname{Im} f$ car elle est génératrice (toujours du fait du Vect) et libre car constituée de deux vecteurs non proportionnels.

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}y\\x-y+z\end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 15

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,x,z) \end{array}$

1. Justifier que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$

Option 1 (qu'on ne fera pas) :

Soit (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de $\mathbb{R}^3$, ainsi que $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) &= f(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') = (\lambda y+y', \lambda x+x', \lambda z+z') \\ &= (\lambda y, \lambda x, \lambda z) + (y',x',z') = \lambda(y,x,z)+(y',x',z') \\ &= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z') \text{ donc } f \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

Option 2 (qu'on privilégiera) : on fait l'analogie avec les matrices

On assimile la fonction f à : $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix} \end{array}$

donc avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors , $f(X) = AX$ où $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

donc pour $X, X' \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda X+X') = A(\lambda X+X') = A(\lambda X)+AX' = \lambda AX + AX'$

Pour la suite, on peut utiliser indifféremment les lignes ou les colonnes :

$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (y,x,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = 0, y = 0$ et $z = 0$ donc $\ker f = \{(0,0,0)\}$

Enfin pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (a,b,c)$ puisque $f(b,a,c) = (a,b,c)$ donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ admet un antécédent, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

Option B (pour $\operatorname{Im} f$) :

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

or $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (c'est la base canonique

2. Montrer que $E_{-1}(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = -X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base e_1

$X \in E_{-1}(f) \Leftrightarrow f(X) = -X \Leftrightarrow f(x,y,z) = -(x,y,z)$ avec $X = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow (y,x,z) = -(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ x & = & -y \\ z & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ y & \in & \mathbb{R} \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $E_{-1}(f) = \{(-y,y,0), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0), y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(-1,1,0)$, donc $E_{-1}(f)$ est un espace vectoriel (car c'est un ensemble engendré par une famille de vecteurs) et $e_1 = (-1,1,0)$ est une base de $E_{-1}(f)$ car c'est une famille génératrice ($E_{-1}(f) = \operatorname{Vect}(e_1)$) et libre (un seul élément non nul).

3. Montrer que $E_1(f) = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base (e_2, e_3)

$X \in E_1(f) \Leftrightarrow f(X) = X \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x,y,z)$ avec $X = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow (y,x,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ x & = & y \\ z & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & \in & \mathbb{R} \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donc $E_1(f) = \{(y,y,z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0) + z(0,0,1), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$, donc de même $E_1(f)$ est un espace vectoriel) et avec $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, (e_2, e_3) est une base de $E_1(f)$ car elle est génératrice (puisque $E_1(f) = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$) et libre (en effet e_2 et e_3 ne sont pas proportionnels).

4. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0)$

alors $\left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 & = & 0 & L_2 - L_1 \\ \lambda_2 & = & 0 & L_1 + L_2 \\ \lambda_3 & = & 0 & \end{array} \right.$

donc (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

5. Déterminer la matrice A qui définit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ égale à f

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $AX = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ donc $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ est l'application linéaire que l'on peut assimiler à f (elle n'est pas strictement égale car elle va de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

6. Soit B et P les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer P^{-1} puis montrer que $A = PBP^{-1}$

On peut utiliser la méthode des « inconnues invisibles » :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -L_1 + L_2 \\ \leftarrow L_1 + L_2 \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

donc P est bien inversible et on a déterminé P^{-1}

donc $PB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Exercice 16

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ 2x + 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix} \end{array}$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX$
2. Montrer que $V = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel.
   Justifier que V possède une base constituée de deux vecteurs, que l'on notera u_1 et u_2
3. On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
4. Déterminer $\ker f$
   Que peut-on en déduire pour l'application f ?
5. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et en donner une base. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Exercice 17 - pour aller un peu plus loin

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x + y + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques.
3. Montrer que f est bijective.
4. Déterminer f^{-1}
5. Déterminer la matrice B de f^{-1} dans les bases canoniques.
6. Calculer A^{-1}
   Que constate-t-on ?