Corrigé *Total sur 85 points*

Exercice 1 - Etudes de fonctions et de suites *Exercice tiré quasiment tel quel du sujet EM Lyon 2023 - 23 points*

Pour $x \in]0;+\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n

1. **a.** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites). *2 points*

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, de plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$
or, $x+1 > 0$ (car $x > 0$), $e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$ et par conséquent, f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
calculons ses limites, on a directement (pas de forme indéterminée) :
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$) et
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$)
d'où le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	-
f	‖	$+\infty$ ↘ 0

b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif. *1,5 points*

On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ »
C'est évident pour $n = 0$ (car $u_0 = 1$ d'après l'énoncé).
Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$:
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$
en particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f, donc $f(u_n)$ est bien défini, i.e u_{n+1} est bien défini
de plus, d'après les variations de fonction f étudiées à la question précédente, on a $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$
donc en particulier $f(u_n) > 0$, i.e $u_{n+1} > 0$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$
Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$

2. Informatique.

a. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$ *1 point*

On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir $u_n > a$, c'est-à-dire tant que $u_n \leqslant a$, d'où le programme :

```python
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u=1
  n=0
  while u<=a:
    u=exp(-u)/u
    n=n+1
  return n
```

b. On considère maintenant la fonction Python :

```python
import numpy as np
def fonc_2(a):
  u=1
  n=0
  while u>a:
    u=np.exp(-u)/u
    n=n+1
  return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5 *1,5 points*
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?Commenter ce résultat en une ligne.

La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit n tel que $u_n \leqslant a$
par conséquent, les termes $u_0, \ldots, u_4$ sont tous compris dans l'intervalle $]10^{-6};10^6]$
Par contre, $u_5 \leqslant 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$, il semblerait que la suite (u_n) alterne des très grand termes avec des très petits termes.

c. Ecrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n *1 point*

Il suffit d'itérer n fois la fonction f, sur le modèle des fonctions `fonc_1` et `fonc_2`, mais avec une boucle `for` au lieu d'une boucle `while`. d'où le programme :

```python
def suite(n):
  from numpy import exp
  u=1
  for k in range(1,n+1):
    u=exp(-u)/u
  return u
```

3. Pour $x \in [0;+\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$

a. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$ *2 points*

La fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables
et pour tout $x \geqslant 0$, on a $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$
or, $e^{-x} > 0$ et $2x \geqslant 0$, donc $g'(x) < 0$ et par conséquent, g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
de plus, g est continue sur cet intervalle (puisqu'elle y est dérivable), donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]$
or, on a directement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$
donc la fonction g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$, que l'on notera α *1,5 points*

Pour tout $x > 0, f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow e^{-x} - x^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
or, g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$, et 0 appartient à l'intervalle image $]-\infty;1]$
donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$, de plus, $\alpha \neq 0$ car $g(0) \neq 0$
donc, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et $\alpha \in]0;+\infty[$

c. Justifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$ (*on rappelle que* $e \approx 2,7$) *1,5 points*

On a $g(1) = e^{-1} - 1$. Or, $e > 2$, donc $e^{-1} < \dfrac{1}{2}$, donc en particulier $e^{-1} < 1$ et par conséquent, $g(1) < 0$
de même, $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = \exp\left(\dfrac{-1}{e}\right) - \exp(-2)$ et comme vu ci-dessus, $\dfrac{1}{e} < 1$, et donc en particulier, $\dfrac{1}{e} < 2$
d'où $\dfrac{-1}{e} > -2$, et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) : $\exp\left(\dfrac{-1}{e}\right) > \exp(-2)$
on en déduit que $g\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0 > g(0)$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g étant continue), l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et même $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ car $g(0) \neq 0$ et $g\left(\dfrac{1}{e}\right) \neq 0$
or α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[0;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$

4. a. Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$ *1 point*

On a $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$ donc $u_2 = f(u_1) = f(e^{-1}) = \dfrac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = ee^{-e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$
donc $u_2 > 1$ i.e. $u_2 > u_0$ car $e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1$ donc $1 - e^{-1} > 0$ et $e^{e^{-1}} > e^0 = 1$ par stricte croissance de l'exponentielle

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$. Déduire de la question précédente que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *1,5 points*

montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$
D'après la question précédente, on a $u_2 > u_0$, soit $v_1 > v_0$, ainsi, la récurrence est initialisée.
maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, on suppose que $v_{n+1} > v_n$
Par hypothèse de récurrence, $v_{n+1} > v_n$, soit $u_{2n+2} > u_{2n}$
par stricte décroissance de f sur $]0;+\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ puis que $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$, soit $u_{2n+4} < u_{2n+2}$, ou encore : $v_{n+2} > v_{n+1}$, ce qui termine la récurrence.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$. Ainsi, la suite (v_n) (i.e. la suite (u_{2n})), est strictement croissante.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{2n+1}$. Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *1,5 points*

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} > u_{2n}$
par stricte décroissance de f sur $]0;+\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore : $w_{n+1} < w_n$, ainsi, la suite (w_n) (i.e. la suite (u_{2n+1})), est strictement décroissante.
Par ailleurs, elle est minorée par 0 ($u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question **1.b.**, on en déduit, par le théorème de la limite monotone que la suite (w_n) converge

5. Pour $x \in]0;+\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$

a. Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$ *0,5 point*

pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc la composée $h(x) = f(f(x))$ a bien un sens, de plus,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} = \frac{x\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}} = xe^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)$$

b. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$ *1,5 points*

D'après la question **1.a.**, la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; +\infty[$. Par conséquent, $f \circ f$ est continue sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues, autrement dit, h est continue sur $]0; +\infty[$
examinons maintenant la continuité de h (à droite) en 0
d'après la question précédente, on a, pour tout $x > 0$, $h(x) = xe^x \exp(-f(x))$
or, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -f(x) = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(-f(x)) = 0$
de plus, $\lim\limits_{x\to 0} xe^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$, ce qui établit la continuité de h (à droite) en 0
Conclusion : la fonction h est continue sur $[0, +\infty[$

c. Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question **3.b.** *1,5 points*

On sait déjà que 0 est solution de $h(x) = x$ puisque $h(0) = 0$ par définition de $h(0)$
cherchons maintenant les solutions strictement positives, pour tout $x > 0$, on a $h(x) = x \Leftrightarrow$
$xe^x \exp\left(\dfrac{-e^{-x}}{x}\right) = x$ (question **5.a.**) $\Leftrightarrow e^x \exp\left(\dfrac{-e^{-x}}{x}\right) = 1$ car $x \neq 0 \Leftrightarrow \exp\left(\dfrac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{-e^{-x}}{x} = -x$ (par injectivité de la fonction exp) $\Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$ (question **3.b.**)
ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est α
Conclusion : l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$, qui sont 0 et α

d. En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1,75 points*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$
notons ℓ la limite de (w_n) (qui existe d'après la question **4.c.**), de plus $w_n \to \ell \Rightarrow w_{n+1} \to \ell$ par propriété
puis en passant à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = h(w_n)$, on obtient alors, par continuité de h sur $[0; +\infty[$ (cf question **5.b.**) : $\ell = h(\ell)$ et par conséquent, d'après la question précédente, $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$
Montrons maintenant que $\ell \neq \alpha$: le premier terme de la suite (w_n) est $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$
or, comme $\alpha < 1$ (cf question **3.c.**), on a, par stricte décroissance de f : $f(\alpha) > f(1)$, soit $\alpha > w_0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leqslant w_0$ car la suite (w_n) est décroissante (cf question **4.c.**), donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \leqslant w_0 < \alpha$
donc $\ell \neq \alpha$, et (w_n) ne peut donc pas converger vers α, par conséquent, ℓ est nécessairement égal à 0 i.e. la suite (w_n) converge vers 0.

6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ? *1,75 points*

La suite (v_n) est croissante (cf question **4.b.**). Donc, par le théorème de la limite monotone : soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge, soit elle ne l'est pas, et dans ce cas diverge vers $+\infty$
On va raisonner par l'absurde, supposons que la suite soit majorée. Alors, dans ce cas, la suite est convergente et notons ℓ' sa limite
De même qu'à la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) = h(v_n)$
or $v_n \to \ell' \Rightarrow v_{n+1} \to \ell'$ par propriété d'où, en passant à la limite (h étant continue) : $\ell' = h(\ell')$, et donc d'après la question **5.c.** $\ell' = 0$ ou $\ell' = \alpha$.
Or, (v_n) est croissante, de premier terme $v_0 = u_0$, qui est strictement supérieur, à la fois à 0 et à α, donc $\forall n \in, v_n \geqslant v_0$
de fait par passage à la limite dans l'inégalité $\ell' \geqslant v_0 > \alpha > 0$ donc $\ell' \neq \alpha$ et $\ell' \neq 0$
de fait (v_n) ne peut pas converger (ni vers 0, ni vers α) ce qui contredit ce qui précède
donc notre hypothèse de départ est fausse, donc (v_n) n'est pas majorée, de fait (étant toujours croissante), d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Problème 1

Inspiré d'un exercice du sujet EM Lyon 2024 - 25 points

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A

Partie I : équations différentielles et intégrales

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $y'(t) = -y(t) + e^{-t}$
où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

a. Résoudre l'équation différentielle homogène $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbb{R}$ *0,5 point*

D'après le cours, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre $y' + y = 0$ est $\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \{t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

b. Déterminer une solution particulière y_0 de (E_1) de la forme $y_0 : t \mapsto ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$ *1,5 points*

Soit a un nombre réel, on considère la fonction y_0 définie (sur $\mathbb{R}$) par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0(t) = ate^{-t}$
Cette fonction sur $\mathbb{R}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, $\forall t \in \mathbb{R}, y_0'(t) = ae^{-t} - ate^{-t} = ae^{-t} - y_0(t) = -y_0(t) + ae^{-t}$
donc dès lors que $a = 1$, alors y_0 est solution de (E_1) donc la fonction y_0 définie par $y_0(t) = te^{-t}$ est une solution particulière de (E_1)

c. Résoudre l'équation différentielle (E_1) *0,5 point*

Par propriété, il suffit de superposer l'ensemble des solutions de l'équation homogène à la solution particulière, et donc l'ensemble des solutions de (E_1) est : $\mathscr{S} = \{t \mapsto \lambda e^{-t} + te^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

d. Calculer $\displaystyle\int_0^1 y_0(t)dt$ *1,5 points*

Comme nous ne connaissons pas de primitive de $t \mapsto te^{-t}$, nous allons procéder à une intégration par parties :
on pose $u'(t) = e^{-t}$ et donc $u(t) = -e^{-t}$ puis $v(t) = t$ d'où $v'(t) = 1$
donc par intégrations par parties : $\displaystyle\int_0^1 u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt$
soit $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}dt = \left[(-e^{-t})t\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t})dt = -e^{-1} \times 1 - (-0) - \int_0^1 (-e^{-t})dt$
or $\displaystyle\int_0^1 (-e^{-t}) = \left[e^{-t}\right]_0^1 = e^{-1} - e^0 = e^{-1} - 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}dt = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = 1 - 2e^{-1} \left(= 1 - \frac{2}{e}\right)$

2. On s'intéresse à l'équation différentielle $\quad (E_2) : y'' - 4y' + 3y = 15$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_2) *2 points*

Dans un premier temps, on résoud l'équation homogène linéaire du second ordre $y'' - 4y' + 3y = 0$ et pour cela on commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$
or de manière évidente, 1 est une racine, de fait l'autre racine est 3
donc les solutions de l'équation homogène sont, par propriété, les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

ensuite, comme le second membre de l'équation est constant, on cherche une solution particulière constante
or avec une fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = k$ où $k \in \mathbb{R}$
alors $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f''(t) = 0$ (car f est constante) et donc :
f solution $\Leftrightarrow 3f(t) = 15 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -6k = 18 \Leftrightarrow k = 5$
donc $t \mapsto 5$ est une solution particulière de l'équation
donc par propriété, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto 5 + \lambda e^t + \mu e^{3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

b. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ *1,5 points*

Soit f une solution de l'équation (E_2), alors d'après la question précédente $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 5 + \lambda e^t + \mu e^{3t}$
donc $f(0) = 5 + \lambda + \mu$
et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \lambda e^t + 3\mu e^{3t}$ donc $f'(0) = \lambda + 3\mu$
donc si on souhaite que f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors cela entraine $5 + \lambda + \mu = 0$ et $\lambda + 3\mu = 1$ soit

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= -5 \\ \lambda + 3\mu &= 1 \end{cases}$$

donc en faisant la différence des deux lignes $(L_2 - L_1)$, on trouve, $2\mu = 6$ et donc $\mu = 3$; de fait $\lambda = -5 - 3\mu = -8$
donc l'unique solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $t \mapsto 5 - 8e^t + 3e^{3t}$

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} y(t)dt$ où y est la solution trouvée à la question **2.b.** *1,5 points*

$\displaystyle\int_0^{\ln(2)} y(t)dt = \int_0^{\ln(2)} (5 - 8e^t + 3e^{3t})dt = \left[5t - 8e^t + e^{3t}\right]_0^{\ln(2)}$
car $t \mapsto 5t - 8e^t + e^{3t}$ est une primitive de $t \mapsto 5 - 8e^t + 3e^{3t}$
donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} y(t)dt = 5\ln(2) - 8e^{\ln(2)} + e^{3\ln(2)} - (0 - 8e^0 + e^0) = 5\ln(2) - 8 \times 2 + e^{\ln(8)} + 7 = 5\ln(2) - 1$

Partie B : étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ *1 point*

<u>Limite en $+\infty$:</u> par produit de limites (car $k > 0$), $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 1)e^{kx} = +\infty$

Limite en $-\infty$: on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{kx}=0$ par croissances comparées,
d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{kx}+e^{kx}=0$

b. Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 *1,5 points*

La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables,
de plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_k'(x)=e^{kx}+(x+1)ke^{kx}=(kx+k+1)e^{kx}$
Comme $e^{kx}>0$ sur $\mathbb{R}$, il vient : $f_k'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow kx+k+1\geqslant 0\Leftrightarrow kx\geqslant -k-1\Leftrightarrow x\geqslant -1-\dfrac{1}{k}$
de plus, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f_k(-1)=0$ et $f_k(0)=1$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\dfrac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$					
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c. Etudier la convexité de f_k *1,5 points*

Comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_k'(x)=(kx+k+1)e^{kx}$ on en déduit, par dérivation d'un produit :
$f_k''(x)=ke^{kx}+(kx+k+1)ke^{kx}=(k^2x+k^2+k+k)e^{kx}=(k^2x+k^2+2k)e^{kx}=(kx+k+2)ke^{kx}$
donc le signe de f_k'' dépend de $kx+k+2$ (car l'exponentielle et k sont strictement positifs)
et $f_k''(x)\geqslant 0\Leftrightarrow kx+k+2\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{k+2}{k}$ et de même $f_k''(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant -\dfrac{k+2}{k}$
donc f_k est concave sur $\left]-\infty,-\dfrac{k+2}{k}\right]$, convexe sur $\left[-\dfrac{k+2}{k},+\infty\right[$ et admet un point d'inflexion pour $x=-\dfrac{k+2}{k}$
car f_k'' change de signe en ce point.

2. **a.** Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection. *2 points*

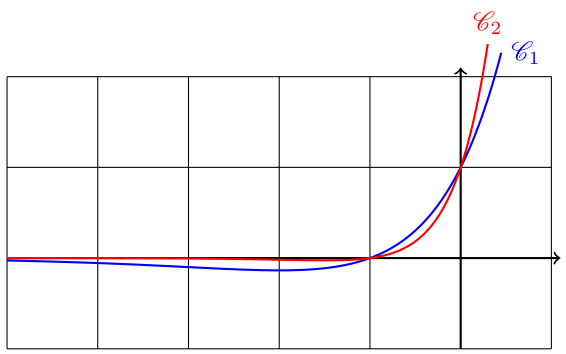
Soit $x\in\mathbb{R}, f_{k+1}(x)\geqslant f_k(x)\Leftrightarrow (x+1)e^{(k+1)x}\geqslant (x+1)e^{kx}\Leftrightarrow (x+1)e^{kx}e^x\geqslant (x+1)e^{kx}\Leftrightarrow (x+1)e^x\geqslant x+1$ (en simplifiant par $e^{kx}>0$) $\Leftrightarrow (x+1)(e^x-1)\geqslant 0$
or nous avons $e^x-1\geqslant 0\Leftrightarrow e^x\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 0$ et $x+1\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -1$
nous en déduisons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ainsi $\mathscr{C}_{k+1}$ se situe au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$, et en-dessous de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $[-1,0]$. Les courbes $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ s'intersectent aux points de coordonnées $(-1,0)$ et $(0,1)$

b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ *1,5 points*

k n'est pas donné, donc on essaie de représenter cette allure pour un k quelconque (ci-dessous $k=1$ et $k=2$) en respectant le résultat de la question précédente, les variations et également que le point d'inflexion se rapproche de -1 lorsque k croit
On représente ici $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$



Partie C : étude d'une suite implicite

1. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k *1,5 points*

La fonction f_k prenant des valeurs négatives sur $]\infty, -1]$, l'équation $f_k(x) = k$ n'a pas de solution dans cet intervalle. La fonction f_k est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f_k([-1, +\infty[) = [0, +\infty[$. Comme $k \in [0, +\infty[$, il vient que l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$ que l'on note u_k et de fait $u_k \in [0, +\infty[$

b. Déterminer explicitement u_1 *0,5 point*

On remarque que $f_1(0) = 1$, donc par unicité de la solution à l'équation $f_1(x) = 1$ on a $u_1 = 0$

2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$ *2 points*

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

Soit $k \geqslant 1$, on trouve $f_k(0) = 1$ et

$$f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) e^{k \times \frac{\ln(k)}{k}} = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) e^{\ln(k)} = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) k = \ln(k) + k$$

et donc $f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right) \geqslant k$ (car $k \geqslant 1 \Rightarrow \ln(k) \geqslant 0$)

ainsi, comme f_k est continue et $k \geqslant 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_k(x) = k$ admet une solution sur $\left[0, \dfrac{\ln(k)}{k}\right]$, or u_k est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}$, donc $u_k \in \left[0, \dfrac{\ln(k)}{k}\right]$, i.e. $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$

enfin, $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissance comparée. A l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_k) converge vers 0

3. On admet que $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ diverge, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$? *1,5 points*

Pour $k \geqslant 3 \geqslant e, \ln(k) \geqslant \ln(3) \geqslant \ln(e)$, (car ln est croissante) donc $\ln(k) \geqslant 1$ car $\ln(e) = 1$ et donc $\dfrac{\ln(k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}$

or d'après l'énoncé $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ diverge, c'est donc forcément vers $+\infty$ car c'est une série à termes positifs et de fait $\sum\limits_{k \geqslant 3} \dfrac{1}{k}$ diverge aussi vers $+\infty$

or $\sum\limits_{k \geqslant 3} \dfrac{\ln(k)}{k}$ est une série à termes positifs, donc d'après le théorème de comparaison (pour $k \geqslant 3, \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$), elle diverge vers $+\infty$ et donc il en va de même pour $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$

4. **a.** Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que $u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{k}$ *1 point*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors par définition $f_k(u_k) = k$ i.e. $(u_k + 1)e^{ku_k} = k$ donc $\ln(u_k + 1) + \ln(e^{ku_k}) = \ln(k)$

puis $ku_k = \ln(k) - \ln(u_k + 1)$ et enfin $u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{k}$

b. En déduire que $\dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} \to 1$ lorsque k tend vers $+\infty$ *1 point*

D'après l'égalité précédente, $u_k \times \dfrac{k}{\ln(k)} = 1 - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)}$

or, sachant que (u_k) converge vers 0, par continuité de ln, $\lim\limits_{k \to +\infty} \ln(u_k + 1) = \ln(1) = 0$

et donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} = 0 \left(" = \dfrac{0}{+\infty}"\right)$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k \times \dfrac{k}{\ln(k)} = 1$ i.e. $\dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} \to 1$

c. Emettre une hypothèse sur la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$ *1 point*

Avec la question précédente, on comprend que plus k est grand, plus u_k est proche de $\dfrac{\ln(k)}{k}$ puisque leur rapport tend vers 1. On peut donc penser que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$ aura la même nature que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$ et qu'elle sera donc divergente (ce qui est bien le cas).

Problème 2

Inspiré d'un exercice du sujet Ecricome 2024 - 37 points

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n

1. Etude du cas $n = 3$

Dans cette question, on considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $(M+I_3)^2$, puis en déduire une expression de M^2 en fonction de M et I_3 *1,5 points*

On obtient immédiatement $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I_3)$
car tous les produits de lignes et de colonnes sont identiques et valent $1+1+1$
donc en développant : $(M+I_3)^2 = M^2 + I_3M + MI_3 + I_3^2 = M^2 + 2M + I_3$
d'où $M^2 + 2M + I_3 = 3M + 3I_3$ et donc $M^2 = M + 2I_3$

b. Avec la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et que : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *2 points*

On s'exécute (ici on propose le pivot de Gauss avec la méthode des « inconnues invisibles ») :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

A ce stade, on peut déjà dire que P est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\text{enfin} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

dont on déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$

c. Déterminer la matrice D *1,5 points*

Il suffit de calculer. Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$P^{-1}M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2+1 & 1+1 & 1-2 \\ 1-2 & 1-2 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

donc par définition :

$$D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1-2 & -1+1 & -1+2-1\\ -1+1 & -1-2 & -1-1+2\\ 2-2 & 2-2 & 2+2+2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

d. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$ *2 points*

Au préalable, nous allons montrer l'égalité $M = PDP^{-1}$ qui nous sera utile pour la récurrence,
on déduit de la question précédente que $PD = PP^{-1}MP = I_3MP = MP$
et donc $PDP^{-1} = MPP^{-1} = MI_3 = M$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit alors l'assertion $P(k) : M^k = PD^kP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $P(k)$ vraie donc par hypothèse $M^k = PD^kP^{-1}$
donc $M^{k+1} = M^k \times M = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^kI_3DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$ donc $P(k+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ est vraie, i.e. $M^k = PD^kP^{-1}$

e. Montrer qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$ pour tout entier naturel k *1,5 points*

On procède à nouveau par récurrence et pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(k) : \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2, M^k = a_kM + b_kI_3$

Initialisation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \exists (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2, M^0 = a_0M + b_0I_3$
ce qui est vrai avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ car $M^0 = I_3$ donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $Q(k)$ vraie, donc par hypothèse
$M^k = a_kM + b_kI_3$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ et alors $MM^k = M(a_kM + b_kI_3)$ i.e. $M^{k+1} = a_kM^2 + b_kM$
or d'après **1.a.** $M^2 = M + 2I_3$ donc $M^{k+1} = a_k(M + 2I_3) + b_kM = (a_k + b_k)M + 2a_kI_3 = a_{k+1}M + b_{k+1}I_3$ donc $Q(k+1)$ est vraie (avec au passage les relations de récurrences non demandées ici : $a_{k+1} = a_k + b_k$ et $b_{k+1} = 2a_k$)
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k)$ est vraie, i.e. $\exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2, M^k = a_kM + b_kI_3$

f. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k *2 points*

On peut effectuer le calcul matriciel pour trouver les coefficients de M^k, puis identifier a_k et b_k, mais il est plus simple de le faire avec D^k (D étant diagonale cela entraine moins de calcul)
d'après la question **1.d.**, $M^k = a_kM + b_kI_3$ i.e. $PD^kP^{-1} = a_kPDP^{-1} + b_kI_3$
donc en multipliant par P^{-1} à gauche puis par P à droite $P^{-1}PD^kP^{-1} = a_kP^{-1}PDP^{-1} + b_kP^{-1}$ i.e. $D^kP^{-1} = a_kDP^{-1} + b_kP^{-1}$
puis $D^kP^{-1}P = a_kDP^{-1}P + b_kP^{-1}P$ soit $D^k = a_kD + b_kI_3$
D étant diagonale, on peut immédiatement calculer ses puissances

$$D^k=\begin{pmatrix}(-1)^k & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}=a_k\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+b_k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_k+b_k & 0 & 0\\ 0 & -a_k+b_k & 0\\ 0 & 0 & 2a_k+b_k\end{pmatrix}$$

ce qui donne $\left\{\begin{array}{lcl}-a_k+b_k & = & (-1)^k\\ 2a_k+b_k & = & 2^k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}a_k & = & \frac{1}{3}\left(2^k-(-1)^k\right)\\ b_k & = & \frac{1}{3}\left(2^k+2(-1)^k\right)\end{array}\right.$

2. Cas $n = 4$

On considère la matrice J_4 carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J_4 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_4)^k = 4^{k-1}J_4$ *1,5 points*

Au préalable, on démontre que $(J_4)^2 = 4J_4$ car, comme pour $(M + I_3)^2$ tous les produits de lignes et de colonnes sont identiques et valent $1 + 1 + 1 + 1$
puis on procède par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'assertion $P(j) : (J_4)^k = 4^{k-1}J_4$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow (J_4)^1 = 4^{1-1}J_4 \Leftrightarrow J_4 = 4^0J_4 \Leftrightarrow J_4 = J_4$ ce qui est vrai, donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(k)$ vraie
donc par hypothèse $(J_4)^k = 4^{k-1}J_4$ donc $J_4\,(J_4)^k = 4^{k-1}J_4J_4$ i.e. $(J_4)^{k+1} = 4^{k-1}J_4^2$
or d'après notre résultat préalable, $J_4^2 = 4J_4$ et donc $(J_4)^{k+1} = 4^{k-1}4J_4 = 4^kJ_4$ i.e. $P(k+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k)$ est vraie, i.e. $(J_4)^{k+1} = 4^{k-1}J_4^2$

b. Exprimer M_4 en fonction de I_4 et J_4 *0,25 points*

De manière évidente, $M_4 + I_4 = J_4$ et donc $M_4 = J_4 - I_4$

c. Exprimer $(M_4)^2$ en fonction de I_4 et J_4 *0,75 points*

On déduit de la question précédente que $(M_4)^2 = (J_4 - I_4)^2 = J_4^2 - J_4I_4 - I_4J_4 + I_4^2 = J_4^2 - 2J_4 + I_4$
or $J_4^2 = 4J_4$ donc $(M_4)^2 = 4J_4 - 2J_4 + I_4 = 2J_4 + I_4$

d. En déduire, pour tout entier naturel k non nul $(M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$ et que l'on a la relation :
$\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = 3c_k + (-1)^k$ *1,5 points*

De manière analogue à la question **1.e.** on procède par récurrence et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'assertion
$Q(k) : \exists c_k \in \mathbb{R}, (M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$

<u>Initialisation</u> : $Q(1)$ est vraie $\Leftrightarrow (M_4)^1 = c_1J_4 + (-1)^1 I_4 \Leftrightarrow M_4 = c_1J_4 - I_4$
ce qui est vrai avec $c_1 = 1$ d'après la question **2.b.**donc $Q(1)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $Q(k)$ vraie, donc par hypothèse
$(M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$ et alors $M_4 (M_4)^k = M_4 \left(c_kJ_4 + (-1)^k I_4\right)$ i.e. $(M_4)^{k+1} = M_4 \left(c_kJ_4 + (-1)^k I_4\right)$
or $M_4 = J_4 - I_4$ donc $(M_4)^{k+1} = (J_4 - I_4)\left(c_kJ_4 + (-1)^k I_4\right) = c_kJ_4^2 + (-1)^k J_4I_4 - c_kI_4J_4 + (-1) \times (-1)^k I_4I_4$
et $(J_4)^2 = 4J_4$ donc $(M_4)^{k+1} = 4c_kJ_4 + (-1)^k J_4 - c_kJ_4 + (-1)^{k+1} I_4 = (3c_k + (-1)^k)J_4 + (-1)^{k+1} I_4$
donc $Q(k+1)$ est vraie avec au passage $c_{k+1} = 3c_k + (-1)^k$
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k)$ est vraie, i.e. $(M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$

e. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $c_k = \dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$ *1,5 points*

Encore par récurrence ! Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'assertion $R(k) : c_k = \dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$

<u>Initialisation</u> : $R(1)$ est vraie $\Leftrightarrow c_1 = \dfrac{3^1 + (-1)^{1+1}}{4} = \dfrac{3+1}{4} = 1$
ce qui est vrai, car comme vu à la question précédente, $M_4 = J_4 - I_4$ i.e. $c_1 = 1$

<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $R(k)$ vraie
donc par hypothèse $c_k = \dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$ or d'après la question précédente, $c_{k+1} = 3c_k + (-1)^k$
donc $c_{k+1} = 3 \times \dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4} + (-1)^k = \dfrac{3 \times 3^k + 3 \times (-1)^{k+1} + 4 \times (-1)^k}{4} = \dfrac{3^{k+1} + (4-3) \times (-1)^k}{4}$
donc $c_{k+1} = \dfrac{3^{k+1} + (-1)^k}{4} = \dfrac{3^{k+1} + (-1)^{k+2}}{4}$ (car $(-1)^{k+2} = (-1)^k (-1)^2 = (-1)^k$) donc $R(k+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, R(k)$ est vraie, i.e. $\dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$

f. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_4)^k$, en fonction de k *1 point*

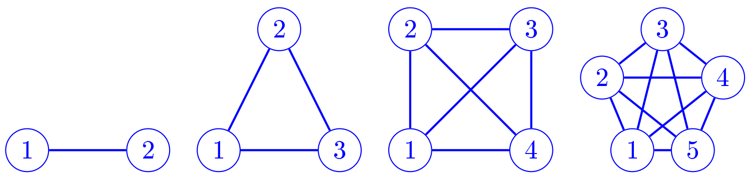
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ alors d'après la question **2.d.** $(M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$
or J_4 est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, donc, en dehors de la diagonale, tous les coefficients de M_4^k sont égaux à c_k et donc égaux à $\dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$
par ailleurs, sur la diagonale, tous les coefficients de M_4^k sont égaux à $c_k + (-1)^k$
donc à $\dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4} + (-1)^k = \dfrac{3^k + (-1+4) \times (-1)^k}{4} = \dfrac{3^k + 3 \times (-1)^k}{4}$

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5 *1 point*

Il s'agit de graphes dits *complets*.



K_2 K_3 K_4 K_5

4. **a.** Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n *0,5 point*

La matrice d'adjacence a pour coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne un 1 ou un 0 selon que les sommets i et j sont reliés par une arête ou non. Il est alors clair que la matrice d'adjacence de K_n ne contient que des 1 sauf sur la diagonale où les coefficients valent 0 (car un sommet n'est pas relié à lui-même), donc c'est la matrice M_n

b. Dans le graphe K_4, combien existe-t-il de chaines (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même ?

On pourra utiliser le résultat de la question 2e. *1 point*

Le nombre de chaines (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice $M_4^4 = c_4 J_4 + (-1)^4 I_4$

D'après la question **2.e.**, ce coefficient vaut $\dfrac{3^4+(-1)^5}{4} + (-1)^4 = \dfrac{3^4+3(-1)^4}{4} = \dfrac{81+3}{4} = \dfrac{84}{4} = 21$

5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n *0,5 point*

Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de celui-ci. Dans le graphe K_n, chaque sommet est relié par une arête aux $n-1$ autres sommets donc le degré de chaque sommet vaut $n-1$

6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *1 point*

D'après le lemme des poignées de mains (ou formule d'Euler), la somme des degrés d'un graphe est égale au double du nombre des arêtes de ce graphe. Notant a_n le nombre d'arêtes de K_n, et s_i le sommet numéro i, on a donc

$\sum\limits_{i=1}^{n} \deg(s_i) = 2a_n$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n}(n-1) = 2a_n$ et de fait $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Nota bene : on peut aussi le voir à travers un dénombrement. En effet, il y autant d'arêtes que de façons de choisir 2 sommets parmi n i.e. $\dbinom{2}{n}$

7. Avec Python :

a. Définir la matrice M_4 *1 point*

Il s'agit simplement d'utiliser la syntaxe qui permet de définir une matrice (i.e. un tableau pour Python).

```
M=np.array([
[0,1,1,1],
[1,0,1,1],
[1,1,0,1],
[1,1,1,0]])
```

b. Ecrire une commande qui permet de retrouver le résultat de la question **4.b.** *1 point*

On calcule M_4^4 par exemple avec la commande `al.matrix_power(M,4)` (après avoir importé `numpy.linalg` au préalable). Le coefficient $1,1$ de M_4^4 doit valoir 21 comme vu plus haut, car il y a 21 chaines de longueur 4 qui lient le premier sommet à lui-même.

c. Ecrire un programme qui permet de tester le critère de connexité du graphe. On émettra sur une hypothèse sur le résultat obtenu au regard de ce critère. *2 points*

Le graphe est connexe, cela se voit à l'œil nu.
Et d'après la question **2.e.**, on sait que M_4^2 ne contient déjà que des coefficients strictement positifs, donc on peut relier toute paire de sommet par une chaine de longueur 2 et a fortiori le graphe est connexe.
On peut tester le critère de connexité avec Python (cf. programme ci-dessous), à savoir calculer $I_4+M_4+M_4^2+M_4^3$ et vérifier que ses coefficients sont tous strictement positifs, ce qui est largement le cas.

```
# matrice de connexité
M_C=np.zeros(4,4) # ne contient que des zéros au début
for k in range (0,4):
    M_C=M_C+al.matrix_power(M,k) # on complète en ajoutant les puissances (entre 0 et 3) de M
```

Partie III

Soit K_4 le graphe défini dans la **partie II**. On parcourt les sommets du graphe K_4 de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k=0$, on se trouve sur le sommet numéro 1
- A chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la $k^{\text{ème}}$ étape (c'est-à-dire à l'issue du $k^{\text{ème}}$ déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1

Pour tout entier naturel k, on note V_k la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ P(X_k=3) \end{pmatrix}$$

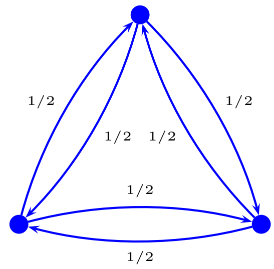
8. Déterminer V_0 et V_1 *1 point*

Comme X_0 est la variable aléatoire constante égale à 1, on a $P(X_0 = 1) = 1$ et $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = 0$ après un déplacement, on peut être soit sur le sommet 2, soit sur le sommet 3 avec équiprobabilité, donc $P(X_1 = 1) = 0$ et $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{2}$

ainsi $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9. Pour $k \in \mathbb{N}$, représenter le graphe orienté et pondéré qui représente la transition entre l'étape k et l'étape $k+1$ *1 point*

Le graphe est analogue au graphe K_3 sauf qu'il s'agit cette fois d'un graphe orienté et pondéré : de chaque sommet on peut aller sur un des deux autres avec une probabilité de $\frac{1}{2}$



10. **a.** Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ *1 point*

Comme à chaque étape, on change de sommet avec équiprobabilité, la probabilité de rester sur le même sommet est nulle et celle d'aller sur un sommet différent est de $\frac{1}{2}$

donc pour (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}, P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) = 0$ et si $i \neq j, P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = \frac{1}{2}$

b. On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.
Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_k = 2) + \frac{1}{2}P(X_k = 3)$$

Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$ *1,5 points*

Comme $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :
$P(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 3) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$
car d'après la question précédente, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = 0$ et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}$
de manière analogue on trouve
$P(X_{k+1} = 2) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 3) = \frac{1}{2}P(X_k = 1) + 0 + \frac{1}{2}P(X_k = 3)$ et
$P(X_{k+1} = 3) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 3) = \frac{1}{2}P(X_k = 1) + \frac{1}{2}P(X_k = 2) + 0$

c. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k, on a $V_{k+1} = AV_k$ *1 point*

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ alors $AV_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}\,(X_k = 1) \\ \mathrm{P}\,(X_k = 2) \\ \mathrm{P}\,(X_k = 3) \end{pmatrix}$

donc $AV_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 2) + \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 3) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 3) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}\,(X_k = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\,(X_{k+1} = 1) \\ \mathrm{P}\,(X_{k+1} = 2) \\ \mathrm{P}\,(X_{k+1} = 3) \end{pmatrix}$

d'après la question précédente. On a donc montré $AV_k = V_{k+1}$

11. **a.** Exprimer A en fonction de M, où M est la matrice définie dans la **partie I**
En déduire pour tout entier naturel k et à l'aide du résultat de la question **9.c.**, une expression de V_{k+1} en fonction de M, V_k et k *0,25 point*

De manière évidente $A = \frac{1}{2}M$ et donc d'après la question précédente, $V_{k+1} = \frac{1}{2}MV_k$

b. En déduire, pour tout entier naturel $k, V_k = \frac{1}{2^k}M^kV_0$ *1,5 points*

Par récurrence, évidemment ! Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(k) : V_k = \frac{1}{2^k}M^kV_0$

Initiation : $M(0)$ est vraie $\Leftrightarrow V_0 = \frac{1}{2^0}M^0V_0 \Leftrightarrow V_0 = 1 \times I_3V_0 \Leftrightarrow V_0 = V_0$
ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $P(k)$ est vraie

d'après la question précédente (valable pour $k \in \mathbb{N}^*$) $V_{k+1} = \frac{1}{2}MV_k$ et par hypothèse de récurrence, $V_k = \frac{1}{2^k}M^kV_0$
donc $V_{k+1} = \frac{1}{2}MV_k = \frac{1}{2}M\frac{1}{2^k}M^kV_0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k}MM^kV_0 = \frac{1}{2^{k+1}}M^{k+1}V_0$ c'est-à-dire que $P(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ est vraie, i.e. $V_k = \frac{1}{2^k}M^kV_0$

c. En utilisant le résultat de la question **1.f.**, en déduire que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une variable aléatoire X, c'est-à-dire $P(X=1) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 1)$, $P(X=2) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=2)$ et $P(X=3) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=3)$
Puis, reconnaitre la loi de la variable aléatoire X *2,75 points*

D'après la question **1.e.** $M^k = a_kM + b_kI3$ donc

$$M^k = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix} \text{ donc } M^kV_0 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_k\\a_k\\a_k\end{pmatrix} \text{ et donc } V_k = \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix}b_k\\a_k\\a_k\end{pmatrix}$$

donc par définition de V_k et d'après les résultats de la question **1.f.**

$P(X_k = 1) = \frac{1}{2^k}b_k = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{3}(2^k + 2(-1)^k) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$

et $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{2^k}a_k = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$

enfin, comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(-\frac{1}{2}\right)^k \to 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$)

donc $P(X_k = 1) \to \frac{1}{3}$ et $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) \to \frac{1}{3}$
donc $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2,3\})$: X la « variable aléatoire limite » suit la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$ ce qui semble logique car au bout d'un grand nombre d'étapes, il semble y avoir autant de chances d'être sur l'un des trois sommets.

d. Avec Python, écrire une commande qui simule 100 réalisations de la variable aléatoires X *0,5 point*

Après avoir importé `numpy.random` (renommée `rd`, il s'agit simplement d'utiliser la commande `rd.randint(1,4,100)` (le 4 étant exclu) et avec 100 comme troisième paramètre pour les 100 réalisations.

12. Soit V la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{3}$
Calculer AV et exprimer le résultat en fonction de V *0,5 point*

$$\text{Par définition } AV = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = V$$

13. Comparer et commenter les résultats des questions **10.c.** et **11.** *1 point*

On voit que V correspond à la « valeur limite »de V_k et qu'il est inchangé par la transition (multiplication par A). Vous parlerez d'état stable l'année prochaine : l'idée étant ici que si la probabilité de se trouver sur chacun des 3 sommets est de $\frac{1}{3}$ à un instant donné, elle le reste à l'instant suivant.