ECG 1a - mathématiques **Devoir en classe** 20 juin 2024

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

1. **a.** Calculer u_1

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
   $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$
   En déduire u_0
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n positif : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ECG 1a - mathématiques **Devoir en classe** 20 juin 2024

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

1. **a.** Calculer u_1

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
   $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$
   En déduire u_0
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n positif : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ECG 1a - mathématiques **Devoir en classe** 20 juin 2024

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

1. **a.** Calculer u_1

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
   $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$
   En déduire u_0
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n positif : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ECG 1a - mathématiques **Devoir en classe** 20 juin 2024

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

1. **a.** Calculer u_1

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
   $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$
   En déduire u_0
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n positif : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 2

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base.
4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2
5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3
6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 2

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base.
4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2
5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3
6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 2

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base.
4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2
5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3
6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 2

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base.
4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2
5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3
6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$