Exercice 1 *10 points*

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n positif par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

1. **a.** Calculer u_1 *1,5 points*

Par définition $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\ln|1-x^2|\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \ln(1)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \quad \left(= \frac{1}{2}(2\ln(2)-\ln(3)) = \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2}\right)$$

car $x \mapsto \ln|1-x^2|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2x}{1-x^2}$ (on a reconnu la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-x^2$)

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$ *2,5 points*

En déduire u_0

Comme souvent dans ces cas-là, il vaut mieux commencer par le plus compliqué :

$\dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} = \dfrac{a(1+x)}{(1+x)(1-x)} + \dfrac{b(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{a+b+(a-b)x}{1-x^2}$ donc en identifiant :

$\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a+b+(a-b)x}{1-x^2} \Leftrightarrow a+b=1$ et $a-b=0 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

donc $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1-x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\right) =$

$\dfrac{1}{2}\left(-\left[\ln|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\ln|1+x|\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln(1) + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \ln(1)\right) = \dfrac{1}{2}(\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)) = \dfrac{\ln(3)}{2}$

car $x \mapsto \ln|1-x|$ et $x \mapsto \ln|1-x|$ sont des primitives respectives de $x \mapsto \dfrac{-1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{-1}{1+x}$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs. *1 point*

$1-x^2 = (1+x)(1-x)$ et $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], 1-x \geqslant 0$ et $1+x \geqslant 0$ donc $1-x^2 \geqslant 0$ et donc $\dfrac{x^n}{1-x^2} \geqslant 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est l'intégrale d'une fonction positive (avec $a<b$) donc $u_n \geqslant 0$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Que peut-on en déduire ? *1,5 points*

Pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1-x^2} - \frac{x^n}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}-x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x$

donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\mathrm{d}x$, et $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], x^n \geqslant 0, 1-x^2 \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ donc $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n$ vaut l'intégrale d'une fonction négative (avec $a<b$), donc $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de plus, elle est minorée (par 0 d'après **2.**) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n positif : $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors de même, $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n - x^{n+2}}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(1-x^2)}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x$

donc $u_n - u_{n+2} = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{n+1}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 0^{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$ *2 points*

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et donc $-\dfrac{1}{4} \leqslant -x^2$ puis $\dfrac{3}{4} \leqslant 1-x^2$ et enfin $\dfrac{4}{3} \geqslant \dfrac{1}{1-x^2}$ en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0,+\infty[$ et en multipliant par $x=n$ qui est positif, on trouve $\dfrac{x^n}{1-x^2} \leqslant \dfrac{4}{3}x^n$

et donc par croissance de l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^n\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x$

et comme nous l'avons vu plus haut $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

par ailleurs $(n+1)2^{n+1} \to \infty$ (limites usuelles) donc par opérations $\dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}} \to 0$
et comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, on en déduit que $u_n \to 0$ par théorème des gendarmes

Exercice 2 *9 points*

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et justifier que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*

   Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $AX = f(X)$, donc A est la matrice associée à cette application linéaire, de plus $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, de fait $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda AX + AY = \lambda f(X) + f(Y)$ (d'après les règles sur les opérations matricielles), donc f est linéaire.

2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*

   Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array} \right.$

   donc $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(U_1)$ avec $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (au passage U_1 est une base de $\ker f$ car c'en est une famille génératrice, par définition du Vect, et c'est une famille libre, car composée d'un seul vecteur, non nul).

3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base. *2 points*

   $\mathrm{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

   $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ car les deuxième et troisième vecteurs sont identiques, de plus $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ (par définition du Vect) et libre car constituée de deux vecteurs non proportionnels, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$

4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2 *2 points*

   Avec avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X \in E_1(f) \Leftrightarrow f(X) = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_1 \\ x_2+x_3 & = & 2x_2 \\ x_2+x_3 & = & 2x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 \end{array} \right.$

   donc $E_2(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}, \right\} = \mathrm{Vect}\,(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   donc $E_2(f)$ est un espace vectoriel (car c'est un ensemble engendré par un vecteur) et U_2 est une base de $E_2(f)$ car elle est génératrice (puisque $E_2(f) = \mathrm{Vect}(U_2)$) et libre car constituée d'un seul vecteur non nul.

5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3 *0,5 point*

   Avec la définition de f ou avec la matrice, on trouve $f(U_3) = U_3$ (i.e. $AU_3 = U_3$)

6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

   $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 & = & 0 & L_2 - L_1 \\ \lambda_2 & = & 0 & L_1 + L_2 \\ \lambda_3 & = & 0 & \end{array} \right.$
   donc (U_1, U_2, U_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à trois éléments, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$