Quelques corrections

Exercice 1 - calcul fractions

Lorsque c'est possible, simplifier les fractions suivantes :

$\dfrac{4\times 3+3\times 3}{3\times 6}=\dfrac{3\times(4+3)}{3\times 6}=\dfrac{7}{6}$ $\quad \dfrac{4}{\frac{7}{8}}=4\times\dfrac{8}{7}=\dfrac{32}{7}$ $\quad \dfrac{\frac{4}{7}}{8}=\dfrac{4}{7\times 8}=\dfrac{1}{14}$ $\quad \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$ $\quad \dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$

Exercice 2 - calcul

a) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{6}{8}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{24}+\dfrac{18}{24}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{22}{24}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{11}{12}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{33}{36}+\dfrac{20}{36}=\dfrac{53}{36}$

$\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}\right)\times\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{21}{6}\right)=\left(\dfrac{6}{4}-\dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{27}{12}+\dfrac{42}{12}\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{69}{12}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{23}{4}=\dfrac{23}{16}$

$\dfrac{\frac{26}{18}\times\frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}=\dfrac{26}{18}\times\dfrac{-45}{7}\times\dfrac{14}{39}=-\dfrac{13\times 2\times 3\times 3\times 5\times 7\times 2}{3\times 3\times 2\times 7\times 13\times 3}=-\dfrac{5\times 2}{3}=-\dfrac{10}{3}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-5$ en effet $\forall a\in\mathbb{R},\sqrt{a^2}=|a|$

donc $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$ car $\sqrt{5}\geqslant 2$ et $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=3-\sqrt{5}$ car $\sqrt{5}\leqslant 3$

Exercice 3 - équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3}$

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, alors $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3}\Leftrightarrow(x-3)(x+3)\dfrac{2x+1}{x-3}=-(x-3)(x+3)\dfrac{2x-1}{x+3}$

$\Leftrightarrow (x+3)(2x+1)=-(x-3)(2x-1)\Leftrightarrow 2x^2+6x+x+3=-(2x^2-6x-x+3)$

$\Leftrightarrow 2x^2+7x+3=-2x^2+7x-3\Leftrightarrow 4x^2+6=0$

or $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\},4x^2+6>0$ donc l'équation n'admet aucune solution

Nota Bene : on peut aussi résoudre léquation en regroupant les fractions et en les réduisant au même dénominateur.

b) $x^2-x+1=0$ Cette équation n'admet aucune solution car son discriminant est strictement négatif : $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3$

$\dfrac{x+1}{x-1}=x$ avec $x\neq 1$, $\dfrac{x+1}{x-1}=x\Leftrightarrow(x-1)\dfrac{x+1}{x-1}=(x-1)x\Leftrightarrow x+1=(x-1)x\Leftrightarrow x+1=x^2-x$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$, nous sommes donc ramenés à une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-1)=8$, cette équation admet donc deux racines,

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$

car $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

c) $x^2-2x-3=0$ on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation, donc $x^2-2x-3=(x+1)(x-x_2)$ et en développant, on trouve donc $x_2=3$

$x^2-x-1=0$ le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=5$, cette équation admet donc deux racines, $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$3x^2+x-2=0$ on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation, donc $3x^2+x-2=3(x+1)(x-x_2)$ et en développant, on trouve donc $x_2=\dfrac{2}{3}$

$-x^2-5x+1=0$ le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta=(-5)^2-4\times(-1)\times 1=29$, cette équation admet donc deux racines, $x_1=\dfrac{5-\sqrt{29}}{-2}=\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$

$\dfrac{1}{x}=x-1$ Comme au b), pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}=x-1 \Leftrightarrow 1=x(x-1) \Leftrightarrow x^2-x-1=0$, nous sommes donc ramenés à l'équation du second degré vue précédemment.

Exercice 4 - équation à paramètre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dépendant du paramètre réel m : $\dfrac{3x-m}{x-1}=m-2$

L'équation n'est pas définie pour $x=1$, on prend donc $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, alors
$\dfrac{3x-m}{x-1}=m-2 \Leftrightarrow 3x-m=(m-2)(x-1) \Leftrightarrow 3x-m=(m-2)x-(m-2)$
$\Leftrightarrow 3x-(m-2)x=2-m+m \Leftrightarrow (5-m)x=2$
donc si le paramètre m vaut 5 alors l'équation est équivalente à $0=2$ ce qui n'est jamais vérifié, donc elle n'admet aucune solution
et si $m\neq 5$, alors l'équation admet pour solution $x=\dfrac{2}{5-m}$
mais il faut vérifier qu'on ne tombe pas sur la valeur interdite qui est 1
or $\dfrac{2}{5-m}=1 \Leftrightarrow 2=5-m \Leftrightarrow m=3$ donc cette valeur n'est pas possible
donc en résumé, si $m=3$ ou $m=5$, l'équation n'admet aucune solution et
sinon l'unique solution est $x=\dfrac{2}{5-m}$

Exercice 5 - équations 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
c) $e^x+e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^x(e^x+e^{-x})=2e^x$
(les deux équations sont bien équivalentes, on peut revenir en arrière en multipliant par e^{-x})
donc $e^x+e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^{2x}+e^0=2e^x \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+1=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+1=0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2=0$
on a reconnu une identité remarquable, puis $(e^x-1)^2=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Nota Bene : on peut aussi écrire $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ et effectuer une réduction au même dénominateur.