Calcul algébrique

Exercice 1

Simplifier l'expression $f(x)$ suivante (on suppose qu'elle est bien définie).

1. $f(x) = \dfrac{2x+6}{2(x+7)}$
2. $f(x) = \dfrac{4x^2-8x+4}{(x-1)(4x+12)}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x-3}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{3}{x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-2x-3} - \dfrac{1}{x-3}$
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1+\frac{1}{x+1}}$

Exercice 2

Soit a et b deux réels non nuls, avec $a \neq b$
Simplifier :

1. $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$
2. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$
3. $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}$ (pour $a \neq -1$).

Exercice 3

Simplifier les fractions suivantes

1. $A = \dfrac{1-(-2)^2}{1-(-2)^3}$
2. $B = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}}$
3. $C = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$

Exercice 4

1. Soit x un réel tel que $x > 1$. Simplifier l'expression $f(x)$, où
$$f(x) = \frac{1}{x-1} \times \frac{1}{2+\frac{1}{x-1}}$$
2. Soit n un entier naturel non nul, et a un réel non nul. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a}-1\right)^n = \frac{(a-1)^n}{na^n}$$
3. Soit n un entier naturel . Mettre en facteur 3^{-n} dans l'expression a_n suivante, et simplifier :
$$a_n = 2 \times 3^{-4n} - 3^{-n} + 3^{-(n+1)}$$
4. Soit n un entier naturel . Mettre en facteur $(-2)^{n-1}$ dans l'expression d_n suivante, et simplifier :
$$d_n = 3(-2)^{n+1} - 5(-2)^{n-1} + (-2)^n$$

Exercice 5

Soit n un entier naturel. Dans chaque expression suivante, faire apparaitre une seule puissance d'exposant n.

1. $a = 4(-3)^n + (-3)^{n+2}$
2. $b_n = 2^{n+1} - 2^n$
3. $c_n = \dfrac{(-3)^{n+2}}{5^{2n+1}}$

Exercice 6

Préciser pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est definie, et simplifier cette expression

1. $f(x) = \sqrt{x^4-6x^2+9}$ (on pensera à une identité remarquable pour transformer l'expression x^4-6x^2+9).

2. $f(x) = \sqrt{x-1} - \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}}$ (on pensera à une identité remarquable pour transformer l'expression x^2-1).

Inégalités

Exercice 7

On suppose que $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 1 \leqslant b \leqslant 2 \end{cases}$, démontrer que : $2 \leqslant a^2 - \dfrac{2}{b} \leqslant 8$

Exercice 8

Déterminer l'ensemble E suivant :

$$E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x - 6 \leqslant 0\}$$

Exercice 9

Simplifier l'expression $f(x)$ suivant les différentes valeurs possibles de x :

$$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$$

Exercice 10

1. On suppose que $x \leqslant 11$. A-t-on $x < 19$?
2. On suppose que $x \leqslant 54$. A-t-on $x < 51$?
3. On suppose que $x < 2$. A-t-on $x \leqslant 1$?
4. On suppose que $x \geqslant 3$. A-t-on $x > 3$?
5. On suppose que $x < 2$. A-t-on $x \leqslant 2$?
6. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 4$?
7. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < -4$?

Exercice 11

1. Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\dfrac{3}{|x|+2} \geqslant 1$
3. Montrer que pour tout $x \in [-3, 2]$, on a :
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}$$
4. Montrer que pour tout $x \in [1, 3[$, on a :
$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} < -\frac{2}{9}$$
5. Montrer que pour tout $x \in [1, 4]$, on a :
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+x-1} \leqslant 1$$
6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$$
7. Montrer que pour tout réel t, on a : $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$
8. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a :
$$0 \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations, d'inconnue x réelle :

1. $|x-5| < 6$
2. $|x-3| \geqslant 4$
3. $|7-3x| \leqslant 5$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$
2. $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$
3. $x - \dfrac{2}{x} > 1$