Le barème indiqué est approximatif et donné à titre indicatif pour te permettre de mieux gérer ton temps

Le sujet comporte 4 pages et 5 exercices. Le devoir dure 4 heures.

Les exercices 1, 2 et 3 sont à faire sur la même copie et les exercices 4 et 5 sur une copie à part.

Attention ! la rédaction devra être soignée et les résultats obtenus devront être rigoureusement justifiés

Bon devoir ! *Calculatrice interdite*

Exercice 1 3,5 points

Dans cet exercice et UNIQUEMENT dans cet exercice, aucune justification n'est demandée

Pour chacun des nombres suivants, indiquer dans la colonne correspondante l'écriture la plus simplifiée possible puis dans la colonne suivante, préciser le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

Nombre	Écriture la plus simplifiée de ce nombre	Plus petit ensemble auquel il appartient
$A = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\,\right)^2}{\sqrt{3}-2}$		
$B = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{48}}{\sqrt{6}}$		
$C = \left(\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}\right)^2$		
$D = \dfrac{\sqrt{0,01}}{10^{-4}}$		
$E = \sqrt{1+\dfrac{2}{3}} \times \sqrt{1-\dfrac{7}{12}}$		
$F = \dfrac{(3\times 5)^2 2^3}{5^4}$		
$G = \ln(2+\sqrt{3})^5 + \ln(2-\sqrt{3})^5$		
$H = \ln(e^2\sqrt{e})$		

Exercice 2 5.5 points

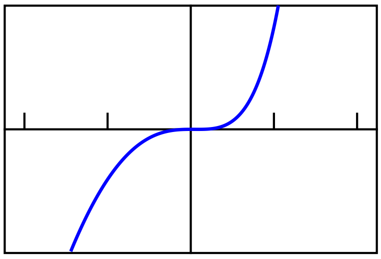
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\lfloor 2x^2+1 \rfloor = 7$
2. $\sqrt{2-x} = x$.
3. $|x+3| \leq 5$
4. $|x+1| + |x-3| = 4$
5. $\left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)^3 = e^2 \times e^{2x}$
6. $\ln(3x^2-5x) \leq \ln x + \ln 2$
7. $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 5 \leq 0$
8. $2^x = 3^{2x+1}$

Exercice 3 4 points

On considère la fonction numérique f définie sur $[-2, 2]$ par : $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{8}x^2$.

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Partie A : Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures peut-on faire concernant

1. la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?
2. le sens de variations de f sur $[-2,\ 2]$?

Partie B : Validité de la première conjecture

Résoudre dans $[-2, 2]$ l'inéquation $f(x) > 0$. Que peut-on en déduire concernant la première conjecture ?

Partie C : Validité de la seconde conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in [-2, 2]$, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{4}$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour $x \in [-2, 2]$
   - **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   - **b.** Donner la valeur de $g(\frac{1}{4})$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variations de la fonction f sur $[-2, 2]$.
   - **a.** Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   - **b.** En déduire le sens de variations de la fonction f.
   - **c.** Déterminer la valeur exacte de $f(\frac{1}{4})$.
   - **d.** Que pensez-vous de votre seconde conjecture ? Expliquer.

Exercice 4 4 points

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse.

Affirmation 1 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^{2n+1} - 2^{2n}}{4^{n+1} + 4^{n}} = \dfrac{1}{5}$.

Affirmation 2 : Pour tous réels a et b strictement positifs : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2 = \dfrac{(a-b)^2}{ab}$

Affirmation 3 : Pour tout réel $x \neq -2$, $\dfrac{4}{(x+2)^2} - 1 = \dfrac{-x^2 - 4x - 8}{(x+2)^2}$.

Affirmation 4 : La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ n'est ni paire ni impaire.

Affirmation 5 : $\ln \sqrt{\dfrac{1}{18}} = -\dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$

Affirmation 6 : Les fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ et $g(x) = \ln(1 + \dfrac{1}{x})$ sont égales.

Affirmation 7 : Pour tout réel $x \in [1, 4]$, $\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{2}{x^2 + 4} \leq \dfrac{2}{5}$.

Affirmation 8 : $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a pour inverse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Exercice 5 3 points

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Étudier les variations de f et donner la valeur exacte de son maximum.

2. On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.

  a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

  b. Tracer T sur le graphique ci-dessous.

3. Soit $M(a; f(a))$ un point de $\mathscr{C}_f$ avec $a \in]0;+\infty[$.

Démontrer que la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si : $a^3 - 1 + 2\ln a = 0$ [1]

4. À partir de l'équation [1], démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Indication : on pourra étudier la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.