Domaine de définition

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^{-4}$

2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^3+x^2+x}$

3. $h(x) = x^{\pi}$

4. $i(x) = e^x \ln(2x+3)$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x^3+1)}{4-x^2}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x - \sqrt{x^2+x-2}}$

Exercice 3

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2+5x+2}$

2. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2-1}$

Signe, parité, monotonie, majorants, minorants

Exercice 4

Donner le domaine de définition, étudier la parité, étudier le signe, des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2. $g(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$

Exercice 5

Pour $x \in [-2, 3[$, on définit

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de f, et tracer $\mathscr{C}_f$

2. f admet-elle un maximum ? Si oui, précisez sa valeur, et le ou les valeurs en le(s)quels il est atteint.

3. f admet-elle un minimum ? Si oui, précisez sa valeur, et le ou les valeurs en le(s)quels il est atteint.

Fonctions usuelles

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réelle suivantes :

1. $|x-2| = 1$

2. $|2x+1| \geqslant 7$

3. $|x+1| + |x+2| = 1$

4. $\lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2$

5. $|\ln(x)| < 1$

6. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

7. $e^{2x} + 8 \geqslant 6e^x$

8. $\sqrt{x} + 1 = x$

9. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n+1$$

Dérivation

Exercice 8

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$
2. $g(x) = \dfrac{1 + x}{1 + e^x} - x$
3. $h(x) = x^{\frac{1}{x}}$
4. $i(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$
5. $j(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

Exercice 9

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f, et étudier f, avec : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
2. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f, et étudier f, avec : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = x\sqrt{x}$

Exercice 10

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$
2. Faire l'étude graphique de la fonction suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = x^{\ln(x)}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$
3. Etudier les variations de f
4. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e
5. Tracer $\mathscr{C}_f$

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f
2. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 1[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$
3. Etudier les variations de f
4. Tracer $\mathscr{C}_f$
5. f admet-elle un minimum ? Un maximum ? Si oui, lesquels ?

Exercice 13

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x) = x^m \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_m$ la représentation graphique de f_m dans un repère orthonormé.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Justifier que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dériver f_m
2. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ admettent la même tangente au point d'abscisse 1